Колмогоровская сложность. Задачи - 3

Случайные последовательности

С1. Доказать, что если $\omega_1\omega_2\ldots$ случайная последовательность. то $\omega_{n+1}\omega_{n+2}\ldots$ также случайная для любого n.

С2. Доказать, что если $\omega_1\omega_2\ldots$ случайная последовательность и $n_1 < n_2 < \ldots$ – вычислимая последовательность номеров, то подпоследовательность $\omega_{n_1}\omega_{n_2}\ldots$ также случайная.

С3. Доказать, что если $K(\omega^n) \leq \log n$, то последовательность ω неслучайная.

Префиксная и монотонная сложности, случайность относительно вычислимой меры

П1. Объясните, почему функция префиксной сложности $KP(x)$ определена для всех x и почему она неограничена, а также невычислимая.

П2. Объясните, почему функция монотонной сложности $KM(x)$ определена для всех x и почему она неограничена, а также невычислимая.

П3.Доказать, что $KP(x, y, z) \leq KP(x|y, z) + KP(y|z) + KP(z) + O(1)$

П4.Доказать, что $K(x) \leq km(x) + O(1) \leq KP(x) + O(1)$

П5.Доказать, что $KM(x) \leq km(x) + O(1)$

П6. Доказать, что $KM(x) \leq KP(x) + O(1)$

П7. Будет ли $KP(x) \leq KM(x) + O(1)$. Если нет, привести пример.

П8. Будет ли $km(x) \leq KM(x) + O(1)$. Если нет, привести пример.

П10. Доказать что $KM(x) \leq K(x) + 2\log K(x) + O(1)$.

П11. Доказать что $KM(x) \leq KM(y) + O(1)$ при $x \subseteq y$.

П12. Доказать что $K(x|l(x)) \leq KM(x) + O(1)$.

П13. Задана вычислимая мера P. Доказать, что если для некоторой бесконечной последовательности ω будет $P(\omega^n) = 0$ для некоторого n то ω неслучайна по мере P.

П14. Доказать, что если для некоторой вычислимой меры P и последовательности ω будет $P(\omega^n) > c > 0$ для всех n, то ω является случайной по мере P.

П15. Доказать, что если для некоторой вычислимой меры P и последовательности ω будет $P(\omega^n) > c > 0$ для всех n, то последовательность ω является вычислимой.

П16. Написать доказательство теоремы Шнорра–Левина для монотонной сложности $KM(x)$.

Сложные задачи

Т1. Доказать, что априорная полумера $P(n)$ на натуральных числах не является вычислимой функцией от n.

Т2. Доказать, что вещественное число $\alpha = \sum_n P(n)$ невычислимое, где $P(n)$ – априорная полумера на натуральных числах, также и $\sum_n P(n) < 1$.

Т3. Доказать, что двоичное разложение действительного числа $\alpha = \sum_n P(n) < 1$ является случайной по Мартин-Лефу последовательностью (относительно равномерной меры).

Т4. Доказать, что для произвольной вычислимой меры P существует неслучайная по этой мере последовательность.

Перед решением указывать номер задачи из этого списка.
Срок сдачи до 5-го декабря 2019г.