C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 99-104, 1998
Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Modèle de double porosité aléatoire

Alain BOURGEAT [a], Andro MIKELIĆ [b], Andrey PIATNITSKI [c]

[a] UMR 5585, Université Jean-Monnet, 23, rue du Dr. P.Michelon, 42023 Saint-Étienne cedex 02, France
[b] UMR 5585, laboratoire d'Analyse numérique, Université Lyon 1, 101, 43, bd. du 11 Novembre, 69622 Villeurbanne cedex, France
[c] P.N.Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninsky pr. 53, Moscow 117924, Russia

(Reçu le 23 mai 1997, accepté après révision le 15 juin 1998)

Résumé. L'homogénéisation de l'écoulement monophasique faiblement compressible dans un milieu poreux fissuré aléatoirement, conduit sous les hypothèses standard à un modèle global qui généralise le modèle à double porosité obtenu dans le cas périodique. L'outil essentiel est la convergence stochastique à double échelle. Les termes sources proviennent alors du couplage avec un problème auxiliaire stochastique de forme nouvelle. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Random double porosity model

Abstract. *We consider a weakly compressible single phase fluid flow through a randomly fissured porous medium. Under standard assumptions of the stochastic homogenization theory we obtain the stochastic version of the periodic case. The basic tool is the stochastic two-scale convergence. The source-like terms are given by the coupling with a newly introduced stochastic auxiliary problem.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

We study a weakly compressible single phase flow through a fissured porous medium. The equation for the density θ^ε reads:

$$\alpha^\varepsilon \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}\left\{K^\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon\right\} = f \quad \text{in } G \times]0,T[, \tag{1}$$

$$\theta^\varepsilon(x,0) = \rho_{\text{in}}(x) \quad \text{in } G, \qquad K^\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon \cdot \nu = 0 \quad \text{on } \partial G \times]0,T[, \tag{2}$$

where the random medium G consists of the porous blocks $G^\varepsilon_m(\omega)$ and the fissures $G^\varepsilon_f(\omega)$, $G = \overline{G^\varepsilon_m(\omega)} \cup G^\varepsilon_f(\omega)$. We assume $M^\varepsilon(\omega)$, the random disperse medium, to be generated from the random set $\mathcal{M} \in \Omega$ by an ergodic dynamical system $\tau(x)$ (*see* [1]), and we set $G^\varepsilon_m(\omega) = M^\varepsilon(\omega) \cap \{x \in G\,;\, \text{dist.}(x, \partial G) \geq \varepsilon\}$. The coefficients in (1)–(2) are given as follows:

$$\alpha^\varepsilon = \chi_{G^\varepsilon_f(\omega)}(x)\phi + \chi_{G^\varepsilon_m(\omega)}(x)\varphi^\varepsilon, \qquad K^\varepsilon = \frac{1}{\mu c}\left\{K\chi_{G^\varepsilon_f(\omega)}(x) + \varepsilon^2 k^\varepsilon \chi_{G^\varepsilon_m(\omega)}(x)\right\},$$

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

where ε^2 stands for the high permeability ratio between the blocks and the fissures. We suppose that the function φ^ε and the constants ϕ, μ, c are strictly positive and the matrices k^ε and K are positive definite.

Using the extension of the periodic two-scale convergence (*see* [2], [3]) to the case of general random fields (*see* [4]), we have:

THEOREM 0.1. – *Let* $f \in \mathrm{L}^2(G \times (0,T))$, $\rho_{\mathrm{in}} \in \mathrm{L}^2(G)$. *Suppose that the set* $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \psi = 0$ *on* $\mathcal{M}\}$ *is dense in* $\mathrm{L}^2(\Omega \setminus \mathcal{M})$ *and that the matrix* $\mathcal{A}_n^0$, *given by* (9), *is positive definite. Then,*

$$\begin{aligned} \theta^\varepsilon(x,t) &\rightharpoonup \theta(x,t) + \chi_{\mathcal{M}} v(x,t,\omega) && \textit{in stochastic 2-scales,} \\ \chi_{G_f^\varepsilon(\omega)} \nabla \theta^\varepsilon(x,t) &\rightharpoonup \chi_{\Omega\setminus\mathcal{M}}(I + \delta(\omega))\nabla_x \theta && \textit{in stochastic 2-scales,} \\ \varepsilon \chi_{G_m^\varepsilon(\omega)} \nabla \theta^\varepsilon(x,t) &\rightharpoonup \chi_{\mathcal{M}} \nabla_\omega v(t,x,\omega) && \textit{in stochastic 2-scales,} \end{aligned}$$

where $\{\theta, v\} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(G)) \times \mathrm{L}^2(G \times (0,T); Z)$ *is the unique solution to the problem* (18)–(22), *and* δ *is the matrix corresponding to the auxiliary Neumann problem* (17).

---

1. Introduction

Lorsqu'on a, comme par exemple pour la diffusion gazeuse en chromatographie ou pour les écoulements en milieu poreux, une très grande différence d'amplitude des perméabilités dans le domaine G, il s'en suit une très grande différence dans les temps caractéristiques. Cette différence importante entre le temps caractéristique des blocs poreux denses (écoulement très lent) et celui du milieu poreux fracturé les entourant (écoulement très rapide), produit un modèle global homogénéisé comportant des effets non locaux sous forme d'une densité de sources (*voir* [5], [6] pour le cas périodique). Dans les modèles de géologie ou de physique, la répartition des fissures est aléatoire ; par exemple poissonienne dans le cas des fractures en géologie. L'approche périodique comme cas particulier d'une répartition aléatoire homogène ergodique, donne la forme qualitative du modèle homogénéisé mais seule une approche stochastique générale peut qualifier exactement ce résultat comme dans (24) par exemple. Pour la première fois, ici est utilisée la convergence à double échelle en moyenne pour expliquer l'apparition d'un terme source dans un contexte aléatoire.

Nous considérons ici le cas d'un écoulement à travers un domaine constitué d'un milieu fissuré et de blocs poreux répartis aléatoirement. Le fluide est supposé faiblement compressible (c est la constante de compressibilité) et de viscosité μ. La densité du fluide dans la partie fissurée est notée ρ^ε et σ^ε dans les blocs. La porosité et le tenseur de perméabilité dans les blocs (resp. dans le milieu fissuré) sont notés φ et k (resp. ϕ et K). De plus, par souci de simplicité, on néglige les effets de la gravité.

2. Description du problème et estimations a priori

Suivant [5], les équations dans le système de blocs poreux $G_m^\varepsilon(\omega)\times]0,T[$ sont :

$$\varphi^\varepsilon \frac{\partial \sigma^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}\left\{\frac{\varepsilon^2 k^\varepsilon}{\mu c} \operatorname{grad} \sigma^\varepsilon\right\} = f, \tag{3}$$

et dans les fissures $G_f^\varepsilon(\omega)\times]0,T[$:

$$\phi \frac{\partial \rho^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}\left\{\frac{K}{\mu c} \operatorname{grad} \rho^\varepsilon\right\} = f. \tag{4}$$

Dans $G = \overline{G_m^\varepsilon} \cup G_f^\varepsilon$, sur les interfaces bloc-fissures on suppose la continuité de la densité et des flux les traversant.

Les conditions initiales sont :

$$\rho^\varepsilon(x,0) = \rho_{\rm in}(x) \quad \text{dans} \quad G_f^\varepsilon \quad \text{et} \quad \sigma^\varepsilon(x,0) = \rho_{\rm in}(x) \quad \text{dans} \quad G_m^\varepsilon.$$

On prend au bord par exemple des conditions d'imperméabilité :

$$\frac{K}{\mu c}\operatorname{grad}\rho^\varepsilon \cdot \nu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial G\times]0,T[. \tag{5}$$

Les hypothèses sur la répartition aléatoire des blocs poreux par rapport aux fissures sont analogues à celles faites dans le cas des inclusions pour les milieux dispersés (*voir* [1], §8.4) ; c'est-à-dire qu'on se donne un espace de probabilité (Ω, Ξ, P), un système dynamique ergodique $\tau(x)\omega$, $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^N$, et on suppose de plus comme dans [4] que $L^2(\Omega)$ est séparable.

Le système des ensembles aléatoires constituant les blocs poreux est défini à partir des réalisations $M_\varepsilon(\omega)$:

$$M_\varepsilon(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^N ; \varepsilon^{-1}x \in M(\omega)\}, \ M(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^N ; \tau(x)\omega \in \mathcal{M}\}.$$

où $\mathcal{M}$ est un ensemble mesurable de Ξ, $P(\mathcal{M}) > 0$ et $P(\Omega \setminus \mathcal{M}) > 0$. Les réalisations du milieu fissuré $\mathbb{R}^N \setminus \overline{M_\varepsilon(\omega)}$ sont de plus supposées connexes presque sûrement. La porosité φ et la perméabilité k dans les blocs sont des champs aléatoires, $\varphi^\varepsilon = \varphi(\tau(x/\varepsilon)\omega)$, $k^\varepsilon = k(\tau(x/\varepsilon)\omega)$.

Pour la répartition spatiale, on introduit G, ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^N$, et son domaine intérieur : $G_1^\varepsilon(\omega) = \{x \in G ; \operatorname{dist}(x, \partial G) \geq \varepsilon\}$.

Une réalisation du système connexe de fissures $G_f^\varepsilon(\omega)$ (resp. des blocs poreux $G_m^\varepsilon(\omega)$) est alors donnée par : $G_f^\varepsilon(\omega) = G \setminus \overline{M_\varepsilon(\omega) \cap G_1^\varepsilon}$ (resp. $G_m^\varepsilon(\omega) = G \setminus \overline{G_f^\varepsilon(\omega)}$).

En utilisant la continuité, à travers l'interface, du flux et du champ des densités, on réécrit les problèmes (3)–(4) avec des coefficients définis globalement :

soit $\theta^\varepsilon \in W(0,T) \equiv \{z \in L^2(0,T ; H^1(G)) ; \dfrac{\partial z}{\partial t} \in L^2(0,T ; (H^1(G))')\}$, solution de :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \alpha^\varepsilon(x,\omega)\theta^\varepsilon\psi + \int_G K^\varepsilon(x,\omega)\,\nabla\theta^\varepsilon\,\nabla\psi = \int_G f\psi\mathrm{d}x, \ \forall\psi \in H^1(G),$$
$$\theta^\varepsilon(x,0) = \rho_{\rm in}, \tag{6}$$

où

$$\theta^\varepsilon = \begin{cases} \rho^\varepsilon & \text{sur } G_f^\varepsilon\times]0,T[, \\ \sigma^\varepsilon & \text{sur } G_m^\varepsilon\times]0,T[\end{cases} \text{ et } \alpha^\varepsilon = \chi_{G_f^\varepsilon(\omega)}(x)\phi + \chi_{G_m^\varepsilon(\omega)}(x)\varphi^\varepsilon, K^\varepsilon = \frac{1}{\mu c}\{K\chi_{G_f^\varepsilon(\omega)} + \varepsilon^2 k^\varepsilon \chi_{G_m^\varepsilon(\omega)}\}.$$

On suppose, comme usuel, $f \in L^2(G\times]0,T[)$, $\rho_{\rm in} \in L^2(G)$. De plus, φ et k sont respectivement uniformément positif et elliptique. De même ϕ, μ, c et K sont respectivement des constantes positives et une matrice constante définie positive. Alors le problème (6) admet une solution unique $\forall\varepsilon > 0$, presque sûrement.

On trouve immédiatement les estimations a priori

$$\begin{aligned} ||\theta^\varepsilon||_{L^\infty(0,T ; L^2(G))} + ||\nabla\rho^\varepsilon||_{L^2(0,T ; L^2(G_f^\varepsilon(\omega))} &\leq C, \\ ||\nabla\sigma^\varepsilon||_{L^2(0,T ; L^2(G_m^\varepsilon(\omega))} &\leq C/\varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

3. Convergence

À partir de D_j, les générateurs infinitésimaux dans $L^2(\Omega)$ du groupe des translations, dont les domaines sont $\mathcal{D}_j$, on définit $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcap_{j=1}^N \mathcal{D}_j$, qui est dense dans $L^2(\Omega)$. On utilise aussi les notations $\nabla_\omega(f) = (D_1 f, \cdots, D_N f)$, $\operatorname{div}_\omega g = \sum_{j=1}^N D_i g_i$ et les espaces associés $\boldsymbol{\nu}^2_{\rm pot}(\Omega)$ et $\boldsymbol{\nu}^2_{\rm sol}(\Omega)$

(*voir* [1]). Les résultats qui suivent sont établis en utilisant la notion de convergence à double échelle en moyenne développée dans [4].

On établit tout d'abord un résultat général :

THÉORÈME 3.1. – *Soit* $\{u^\varepsilon(\omega)\}_\varepsilon \subset \mathrm{H}^1(G)$ *une suite telle que, presque sûrement :*

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(G)}+\|\nabla u^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(G_f^\varepsilon(\omega))} &\le C, \\ \|\nabla u^\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(G_m^\varepsilon(\omega))} &\le C/\varepsilon. \end{aligned} \tag{8}$$

On suppose que l'ensemble $\mathcal{D}_\mathcal{M} = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega)\,;\, \psi = 0$ *sur* $\mathcal{M}\}$ *est dense dans* $\mathrm{L}^2(\Omega \setminus \mathcal{M})$ *; on suppose de plus* $\mathcal{A}_n^0$ *définie positive, où* $\mathcal{A}_n^0$ *est la matrice de perméabilité associée aux conditions de Neumann sur les inclusions par :*

$$\xi \cdot \mathcal{A}_n^0 \xi = \inf_{w \in X} \int_{\Omega\setminus\mathcal{M}} (\xi + w)\cdot K(\xi + w) P(\mathrm{d}\omega), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{9}$$

et où X *est la fermeture dans* $\left(\mathrm{L}^2(\Omega \setminus \mathcal{M})\right)^N$ *de* $\boldsymbol{\nu}^2_{\mathrm{pot}}(\Omega)$.

Alors il existe des fonctions $(u, v, u_1) \in \mathrm{H}^1(G) \times \mathrm{L}^2(G\,;\mathcal{D}(\Omega)) \times \mathrm{L}^2\big(G\,;\boldsymbol{\nu}^2_{\mathrm{pot}}(\Omega\setminus\mathcal{M})\big)$; $v = 0$ *sur* $\Omega \setminus \mathcal{M}$ *et* $u_1 = 0$ *sur* $\mathcal{M}$ *telle qu'il existe une sous-suite extraite convergeant au sens de la double échelle en moyenne :*

$$u^\varepsilon \longrightarrow u(x) + \chi_\mathcal{M}(\omega) v(x,\omega), \tag{10}$$

$$\chi_{G_f^\varepsilon(\omega)} \nabla u^\varepsilon \longrightarrow \chi_{\Omega\setminus\mathcal{M}}(\omega)[\nabla_x u(x) + u_1(x,\omega)], \tag{11}$$

$$\varepsilon\chi_{G_m^\varepsilon(\omega)} \nabla u^\varepsilon \longrightarrow \chi_\mathcal{M}(\omega)\nabla_\omega v(x,\omega). \tag{12}$$

La preuve est basée sur une généralisation du cas périodique étudié dans [7] en utilisant les propriétés de la convergence à double échelle en moyenne définie dans [4].

THÉORÈME 3.2. – *Avec les mêmes hypothèses sur* $\mathcal{D}_\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{A}_n^0$ *que celle du théorème* 3.1, *il existe des fonctions :* $(\theta, v, \theta_1) \in \mathrm{L}^2(0,T\,;\mathrm{H}^1(G)) \times \mathrm{L}^2(G\times]0,T[\,;\mathcal{D}(\Omega)) \times \mathrm{L}^2(G\times]0,T[\,;\boldsymbol{\nu}^2_{\mathrm{pot}}(\Omega\setminus\mathcal{M}))$; $v = 0$ *sur* $\Omega \setminus \mathcal{M}$ *et* $\theta_1 = 0$ *sur* $\mathcal{M}$, *telles qu'il existe une sous-suite* $\{\theta^\varepsilon\}_\varepsilon$ *de solutions de* (6) *convergeant au sens de la double échelle en moyenne :*

$$\theta^\varepsilon \longrightarrow \theta(x,t) + \chi_\mathcal{M}(\omega) v(x,t,\omega), \tag{13}$$

$$\chi_{G_f^\varepsilon(\omega)} \nabla \theta^\varepsilon \longrightarrow \chi_{\Omega\setminus\mathcal{M}}(\omega)[\nabla_x \theta(x,t) + \theta_1(x,t,\omega)], \tag{14}$$

$$\varepsilon\chi_{G_m^\varepsilon(\omega)} \nabla \theta^\varepsilon \longrightarrow \chi_\mathcal{M}(\omega)\nabla_\omega v(x,t,\omega), \tag{15}$$

où θ_1 *vérifie :*

$$\theta_1(x,t,\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\theta(x,t)\delta^j(\omega), \tag{16}$$

avec $\delta^j(\omega) \in X$ *la solution du problème auxiliaire de Neumann :*

$$\int_{\Omega\setminus\mathcal{M}} \psi \cdot K(e_j + \delta^j) P(\mathrm{d}\omega) = 0, \quad j = 1,\dots,N, \qquad \forall \psi \in \boldsymbol{\nu}^2_{\mathrm{pot}}(\Omega\setminus\mathcal{M}). \tag{17}$$

La preuve utilise les estimations a priori (7) et le théorème 3.1.

On définit ensuite l'espace $Z = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ;\ \psi = 0$ sur $\Omega \setminus \mathcal{M}\}$ et on a alors :

THÉORÈME 3.3. – *Soient* θ *et* v *définis par* (13)–(15)*; alors* $(\theta, v) \in L^2(0, T, H^1(G)) \times L^2(G\times]0, T[\,; Z)$; $\partial_t\theta \in L^2(0, T\,; (H^1(G))')$; $\partial_t v \in L^2(G\times]0, T[\,; Z')$ *est la solution unique de :*

$$\frac{\partial}{\partial t}[\phi^*\theta(x,t) + \mathbb{E}\{\varphi(\omega)v(x,t,\omega)\}] - \frac{1}{\mu c}\mathrm{div}_x\{\mathcal{A}_n^0\nabla_x\theta\} = f(x,t) \quad \textit{dans } G\times]0, T[, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{M}}\varphi(\omega)\{\theta(x,t) + v(x,t,\omega)\}\xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega) + \frac{1}{\mu c}\int_{\mathcal{M}}k(\omega)\nabla_\omega v(x,t,\omega)\nabla_\omega\xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega)$$
$$= f(x,t)\int_{\mathcal{M}}\xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega), \qquad \forall\xi \in Z, \tag{19}$$

$$v(x,0,\omega) = 0, \tag{20}$$

$$A_n^0\nabla_x\theta\cdot\nu = 0 \quad \textit{sur } \partial G\times]0,T[, \tag{21}$$

$$\theta(x,0) = \rho_{\mathrm{in}} \textit{ dans } G. \tag{22}$$

où $\phi^* = \mathbb{E}\{\phi\chi_{\Omega\setminus\mathcal{M}} + \varphi\chi_{\mathcal{M}}\}$.

La preuve découle du théorème de convergence (théorème 3.2) et de l'étude précise des problèmes à double échelle.

4. Application à une classe particulière de milieu aléatoire

On suppose que tous les coefficients de (3)–(4) sont constants dans chaque partie et que les matrices de perméabilité sont isotropes ($k = k_0 I$). Le milieu est dit *dispersé* s'il est formé de blocs poreux $S_j(\omega)$, fermés, strictement convexes, n'ayant aucun point intérieur commun. On suppose ici que $L^2(\Omega)$ est séparable, comme on peut par exemple le vérifier dans le cas ou chaque réalisation $\mathcal{M}(\omega)$ est la reproduction presque-périodique d'un unique $S_j(\omega)$. Chaque S_j est de plus obtenu à partir d'un obstacle fixe S, de frontière régulière et homéomorphe à une boule, par le produit d'une translation H_j, par une rotation θ_j et par une homothétie de rapport λ_j, $\lambda_j \in [\lambda_*, \lambda^*]$; $0 < \lambda_* < \lambda^* < \infty$.

On sait alors que dans ce cas la matrice $\mathcal{A}_n^0$ est définie positive (*voir* [1]) et de plus, en utilisant l'ergodicité et en régularisant, on montre que $\{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \psi = 0 \text{ sur } \mathcal{M}\}$ est dense dans $L^2(\Omega\setminus\mathcal{M})$. On remarque que, comme dans [1], l'hypothèse de convexité des blocs poreux peut être remplacée par $P\,\{\text{distance (entre obstacle)} > 0\} = 1$.

De plus, dans ce cas on peut simplifier le problème (19)–(20) car alors pour presque tout (x,t), $\widetilde{v}(t,x,y,\omega) \equiv v(t,x,\tau_y(\omega))$ est presque sûrement une solution, en la variable y, du problème :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi\theta(x,t) + \varphi\widetilde{v}(t,x,y,\omega)] - \frac{1}{\mu c}k_0\Delta_y\widetilde{v}(t,x,y,\omega) = f(x,t) \qquad \text{dans } \bigcup_j S_j\times]0,T[,$$
$$\widetilde{v}|_{t=0} = 0, \qquad\qquad \widetilde{v}|_{\mathbb{R}^N\setminus\bigcup_j S_j} = 0. \tag{23}$$

Remarque 4.1. – La formulation (18)–(22) peut se réécrire dans les variables physiques initiales comme :

$$P(\Omega\setminus\mathcal{M})\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) - \mathrm{div}_x\{\mathcal{A}_n^0\nabla_x\rho(x,t)\} = f(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{M}}\varphi\sigma(t,x,\omega)P(\mathrm{d}\omega) \quad \text{dans } G,$$

$$\varphi\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\sigma}(t,x,y) - \frac{1}{\mu c}\mathrm{div}_y k_0\nabla_y\widetilde{\sigma}(t,x,y) = f(x,t) \quad \text{dans } Y = M(\omega),$$

$$\widetilde{\sigma}(0,x,y) = \rho_{\mathrm{in}}, \qquad \widetilde{\sigma}(t,x,y)\big|_{\partial Y} = \rho(t,x).$$

Les S_k étant isolés, la restriction de cette solution à S_k dépend alors seulement de S_k et de t. Il s'ensuit que la fonction de Green Q_k associée à chaque problème dans S_k peut être calculée à partir de la fonction de Green Q associée à l'opérateur :

$$\varphi \frac{\partial \cdot}{\partial t} - k_0 \Delta_y \cdot \quad \text{sur} \quad S \times]0, T[,$$

avec condition de Dirichlet sur la frontière de S.

Alors, pour S_j en utilisant les translations H_j, on a :

$$Q_j(t, y, z) = \lambda_j^{-N} Q\Big(\frac{t}{\lambda_j^2}, H_j^{-1}(y), H_j^{-1}(z)\Big).$$

On peut de plus introduire la fonction

$$F(\lambda) = \lim_{r \to \infty} \left(\frac{\text{nombre de } S_j(\omega) \in \mathrm{B}_r \, : \, \lambda_j(\omega) \leq \lambda}{\mathrm{vol}(\mathrm{B}_r)} \right)$$

qui, après renormalisation, donne la distribution du coefficient de dilatation $\lambda_j(w)$ On a en utilisant le théorème de Birkhoff et en appliquant la fonction de Green Q à (23), l'espérance de v donnée par :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{M}} v(t, x, \omega) P(\mathrm{d}\omega) &= \lim_{r \to \infty} \left\{ \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathrm{B}_r)} \int_{\mathrm{B}_r} \widetilde{v}(t, x, y, \omega) \mathrm{d}y \right\} \\ &= \lim_{r \to \infty} \left\{ \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathrm{B}_r)} \sum_{\{j : S_j \subset \mathrm{B}_r\}} \int_0^t \int_{S_j} \int_{S_j} Q_j(t-s, y, z) \big[f(x, s) - \varphi \partial_s \theta(x, s)\big] \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \right\},\end{aligned}$$

et avec le théorème de Birkhoff appliqué à la distribution associée à $F(\lambda)$ on a finalement :

$$\int_{\mathcal{M}} v(t, x, \omega) P(\mathrm{d}\omega) = \int_0^t (f(x, s) - \varphi \partial_s \theta(x, s)) \int_{\lambda_*}^{\lambda^*} \mathrm{d}F(\lambda) \int_{\lambda S} \int_{\lambda S} \lambda^{-N} Q\Big(\frac{t-s}{\lambda^2}, \frac{y}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}\Big) \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{24}$$

Remarque 4.2. – La propriété du second membre de (24) d'être une fonction linéaire de θ et f dépendant seulement de la distribution de λ, peut être généralisée au cas où les blocs poreux S_j sont générés à partir d'un unique obstacle par un difféomorphisme Θ_j. Alors il est clair qu'on aura à nouveau un second membre dans (24) qui dépendra linéairement de θ et f et dépendant uniquement de la distribution de Θ par la mesure associée.

Références bibliographiques

[1] Jikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A., Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] Allaire G., Homogenization and two-scale covergence, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992) 1482–1518.

[3] Nguetseng G., A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal. 20 (1989) 608–628.

[4] Bourgeat A., Mikelić a., Wright S., On the stochastic two-scale convergence in the mean and applications, J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal) 456 (1994) 19–51.

[5] Arbogast T., Douglas Jr., J., Hornung U., Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory, SIAM J. Math. Anal. 21 (1990) 823–836.

[6] Bourgeat A., Luckhaus S., Mikelić A., Convergence for the homogenization process for a double porosity model of immiscible two-phase flow, SIAM J. Math. Anal. 27 (1996) 1520–1543.

[7] Fasano A., Mikelić A, Primicerio M., Homogenization of flows through porous media with permeable grains, Adv. Math. Sci. Appl. (1998) (à paraître).