Канд.техн.наук доц. Х.М.ЛАЗАРЕВ,
канд.физ.-мат.наук В.Г.КАНОВЕЙ
(МИИТ)

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ ОПЕРАТИВНОГО РУКОВОДСТВА ПЕРЕВОЗОЧНЫМ ПРОЦЕССОМ

В современных условиях оперативного руководства перевозочным процессом оптимизация работы и сокращение транспортных затрат немыслимо без применения экономико-математических методов и ЭВМ. Значительный интерес представляют задачи распределения ресурсов вагонов, автомобилей, комплексных механизированных передвижных бригад с учетом вероятностного спроса и значимости объекта, на который распределяются ресурсы.

Предлагаемая задача распределения ресурсов, например, автомобилей, возникает вследствие того, что в практической работе ежедневно возникают ситуации выпуска автомобилей на грузовые станции узла в часы, когда тот или иной автомобиль может с момента выхода на линию выполнить большую работу, если он будет направлен на другую станцию, чем это планировалось до конкретной ситуации.

Аналогичные ситуации возникают ежедневно в узлах, на отделении и в масштабе дороги, а также на сети железных дорог, и по распределению таких ресурсов, как вагоны, локомотивы, передвижные механизированные бригады.

0,91, а при отсутствии двух последних – 0,54.

Расчетная формула остатка грузов на ГСК определяется следующим выражением:

$$y = 0{,}0415 \cdot x_1^{-0{,}149} \cdot x_2^{0{,}0130} \cdot x_3^{0{,}1801} \cdot x_4^{-0{,}0066} \cdot x_5^{0{,}1592} \cdot x_6^{0{,}0911} \cdot x_7^{0{,}0789} \cdot x_8^{0{,}4274} \cdot x_9^{0{,}4758}, \quad (19)$$

где y – остаток груза, т;

$x_1, x_2, x_3 \ldots$ – перечисленные выше факторы.

Сравнительный анализ расчетных и фактических остатков грузов на ГСК свидетельствует о хорошей сходимости и поэтому элементы расчетной формулы (19) могут быть рекомендованы для определения остатков груза по каждому ГСК.

Метод многофакторного корреляционного анализа может быть рекомендован для нормировании остатка грузов на складах, наличия контейнеров к вывозу, потребного парка автомобилей и других показателей работы грузового хозяйства.

Выполненные исследования на кафедре "Организация грузовой и коммерческой работы" МИИТа показали, что многофакторный корреляционный анализ может быть с успехом применен для нормирования показателей работы контейнерных пунктов, грузовых станций и отделений железных дорог.

В данной статье предлагается алгоритм распределения ресурсов на примере автомобилей для завоза и вывоза грузов (контейнеров). Задача рассматривается для условий предварительного (на первом этапе до начала работы) и окончательного распределения (на втором этапе после начала работы) ресурса[1].

1. Исходные данные. Рассматривается задача о распределении ресурса между потребителями (КП) $П_1$, $П_2, \ldots, П_i, \ldots, П_n$ (всего n потребителей; индекс i – порядковый номер КП). Автоэкспедиционные комбинаты (АЭК) C_1, $C_2, \ldots, C_j, \ldots, C_k$, на которых находятся автомобили (j – порядковый номер АЭК).

Для каждого $j \le k$ выделено множество N_j номеров потребителей, которые могут пользоваться j-ым АЭК. Предполагается

$$\bigcup_{j \le k} N_j = \{1, 2, \ldots, n\} \quad и \quad N_{j_1} \cap N_{j_2} = 0 \ при \ j_1 \neq j_2.$$

Общий запас ресурса у оперирующей стороны (ОС) равен Y.

Суммарное требование ресурса X со стороны потребителей известно ОС.

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеются числа γ_i, p_i, q_i, известные ОС. Число $\gamma_i > 0$ – "вес" потребителя. $П_i$ – означает, что чем больше γ_i, тем в большей степени ОС заинтересована удовлетворить запрос $П_i$. Значение чисел p_i и q_i разъясняется в п. 2.

2. План игры. Рассматриваемая игра состоит из следующих этапов:

А) ОС разбивает свой ресурс Y на два слагаемых: $Y = R + Y'$;

Б) ОС распределяет часть R своего ресурса по АЭК: $R = R_1 + \ldots + R_k$.

Ресурс R_j направляется на АЭК C_j;

В) ОС распределяет часть Y' своего ресурса по КП:

$$Y' = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

[1] Л.В.Агапова. Задача распределения ресурса. – "Техническая кибернетика", 1976, № 4.

Ресурс y_i доставляется КП $П_i$;

Г) От каждого КП $П_i$ поступает запрос x_i; $x_1+x_2+\ldots+x_n=X$;

Д) Зная вектор запроса $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, ОС распределяет часть R своего ресурса, оставшегося после распределения по КП, между КП $П_i$: $R=z_1+z_2+\ldots+z_n$. При этом, в соответствии с п.1, для каждого $j\le k$ выполняется равенство

$$R_j=\sum_{i\in N_j} z_i. \qquad (1)$$

Игра окончена.

Для каждого $i=1,2,\ldots,n$ подсчитывается число

$$W_i=max\left\{0,\gamma_i(x_i-p_iy_i-q_iz_i)\right\}, \qquad (2)$$

имеющее смысл неудовлетворенности КП $П_i$ в результате игры. Подсчитывается также суммарная неудовлетворенность $W=W_1+W_2+\ldots+W_n$ всех КП.

Числа p_i и q_i, фигурирующие в подсчете W (известные ОС), имеют смысл степени эффективности использования ресурса КП $П_i$ соответственно на этапах В и Д. В рассматриваемой задаче предполагается $p_i\ge q_i$, т.е. ресурс, распределяемый раньше, используется более эффективно.

Цель игры со стороны ОС – подобрать такую стратегию этапов А,Б,В,Д, чтобы минимизировать неудовлетворенность W при самом худшем с точки зрения ОС действия КП $П_1$, $П_2$, ..., $П_n$ на этапе Г. Заметим, что КП связаны условием $x_1+x_2+\ldots+x_n=X$.

3. <u>Стратегия ОС на этапе Д.</u> На этом этапе к исходным данным, упомянутым в п. 1, прибавляются следующие:

числа $R_1, R_2, \ldots, R_k$, и $R=R_1+\ldots+R_k$;

числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$;

числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Нужно вычислить числа $z_1, z_2, \ldots z_n\ge0$, удовлетворяющие равенству (2) (при всех $j\le k$) и обеспечивающие наименьшее значение функции W.

Для каждого $j\le k$ вводится совокупность $M_j=\{i\in N_j: x_i-p_iy_i\ge0\}$ номеров тех КП $П_i$, которые обслуживаются АЭК C_j и которые не удовлетворены предварительным распределениям ресурса на этапе В.

На этапе Д из АЭК C_j обслуживаются те КП, номера которых входят в M_j, и прежде всего те из них, в которых величина $\gamma_i q_i$ наибольшая. Это достигается следующим образом. Пусть $M_j=\{i_1,i_2,\ldots,i_l,\ldots,i_r\}$ – нумерация множества M_j в порядке убывания $\gamma_i q_i$, т.е.

$$\gamma_{i_1}q_{i_1}\ge\gamma_{i_2}q_{i_2}\ge\ldots\ge\gamma_{i_l}q_{i_l}\ge\ldots\ge\gamma_{i_r}q_{i_r}$$

(величины r и $i_1, i_2, \ldots, i_r$ зависят от рассматриваемого j).

Теперь индукцией по $l\le r$ определяем

$$z_{i_l}=min\left\{\frac{x_{i_l}-p_{i_l}y_{i_l}}{q_{i_l}},\ R_j-\sum_{m=1}^{l-1} z_{i_m}\right\}. \qquad (3)$$

Если же $i\in N_j-M_j$, то полагаем $z_i=0$.

Таким образом, значение z_i определено для всех $i\in N_j$. Проделав эту операцию последовательно для $j=1,2,\ldots,K$, получаем искомые числа $z_1,z_2,\ldots z_n$.

Рассмотрим пример расчета по этому алгоритму.

4. <u>Пример расчета на этапе Д.</u> Выбраны следующие исходные данные.

Таблица 1

i	γ_i	p_i	q_i	y_i	x_i
1	5	4	1	80	100
2	1	3	1	0	100
3	1	2	1	0	50

Продолжение табл. 1

i	γ_i	p_i	q_i	y_i	x_i
4	2	4	1	74	150
5	2	2	1	146	100

$X = 500$; $Y = 400$; $k = 2$; $N_1 = \{1,2,3\}$; $R_1 = 100$; $N_2 = \{4,5\}$; $R_2 = 0$.

Примечание. Значения y_i, R_1, R_2 взяты не произвольно, а в соответствии с предложенными ниже расчетами по этапам А,Б,В.

1) $j = 1$. Итак, $N_1 = \{1,2,3\}$.

Вычисляем M_1.

1а – $x_1 - p_1 y_1 = 100 - 320 < 0$;

$x_2 - p_2 y_2 = 100 > 0$;

$x_3 - p_3 y_3 = 50 > 0$.

Таким образом, $M_1 = \{2,3\}$.

1б – перенумеровываем M_1

$\gamma_2 q_2 = 1$;

$\gamma_3 q_3 = 1$.

Таким образом, можно оставить нумерацию в соответствии с естественным порядком: $i_1 = 2$, $i_2 = 3$.

1в – вычисляем по формуле (3)

$$z_{i_1} = z_2 = \min\left\{\frac{x_2 - p_2 y_2}{q_2},\ R_1\right\} = \min\left\{\frac{100}{1},\ 100\right\} = 100;$$

$$z_{i_2} = z_3 = \min\left\{\frac{x_3 - p_3 y_3}{q_3},\ R_1 - z_{i_1}\right\} = \min\{100,\ 0\} = 0;$$

$z_1 = 0$ потому, что $1 \in N_1 - M_1$.

Итак, $z_1 = 0$, $z_2 = 100$, $z_3 = 0$.

2) $j = 2$. $N_2 = \{4,5\}$.

Вычисляем M_2

$x_4 - p_4 y_4 = 150 - 4 \cdot 74 < 0$;

$x_5 - p_5 y_5 = 100 - 2 \cdot 146 < 0$;

M_2 – пустое множество;

$z_4 = z_5 = 0$.

Окончательный результат:

$z_1 = 0$; $z_2 = 100$; $z_3 = 0$; $z_4 = 0$; $z_5 = 0$.

5. Второй пример расчета на этапе Д.

Таблица 2

i	γ_i	p_i	q_i	y_i	x_i
1	5	4	1	78	150
2	1	3	1	0	50
3	1	2	2	0	50
4	2	4	1	57	0
5	2	2	1	115	250

$X = 500$; $Y = 400$; $k = 2$; $N_1 = \{1,2,3\}$; $N_2 = \{4,5\}$; $R_1 = 100$; $R_2 = 50$.

1) $j = 1$; $N_1 = \{1,2,3\}$.

1а – $x_1 - p_1 y_1 < 0$,

$x_2 - p_2 y_2 > 0$,

$x_3 - p_3 y_3 > 0$;

$M_1 = \{2,3\}$.

1б – $\gamma_2 q_2 = 1$, $\gamma_3 q_3 = 2$.

Значит, $i_1 = 3$, $i_2 = 2$.

$$1в - z_{i_1} = z_3 = \min\left\{\frac{x_3 - p_3 y_3}{q_3},\ R_1\right\} = \min\left\{\frac{50}{1},\ 100\right\} = 25;$$

$$z_{i_2} = z_2 = \min\left\{\frac{50}{1},\ 100 - z_{i_1}\right\} = 50;$$

$z_1 = 0$;

2) $j = 2$; $N_2 = \{4,5\}$.

2а – $x_4 - p_4 y_4 < 0$;

$x_5 - p_5 y_5 > 0$;

$M_2 = \{5\}$.

2б. – Поскольку M_2 – одноэлементное множество, то $i_1 = 5$.

2в. – $z_5 = z_{i_1} = min\left\{ \frac{250-230}{1}, 50\right\} = 20$

Результат: $z_1 = 0$; $z_2 = 50$, $z_3 = 25$, $z_4 = 0$, $z_5 = 20$.

6. Схема расчета на этапе В. Помимо исходных данных, упомянутых в п. 1, мы имеем число R и числа $R_1, R_2, \dots, R_k$: $R_1 + R_2 + \dots + R_k = R$.

Нужно определить $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Для каждого $i \le n$ через $R^{(i)}$ обозначаем R_j, где $j \le k$ таково, что $i \in N_j$ (единственность и существование j обеспечиваются соображениями п.1).

Для $i \le n$ вводим функцию $\varphi_i(R) = \gamma_i(X - q_i R)$ (от переменной R). Предполагается, что

$$\varphi_1(R^{(1)}) \ge \varphi_2(R^{(2)}) \ge \dots \ge \varphi_n(R^{(n)}). \quad (4).$$

Если это не так, то перенумеровываем $П_i$ и вносим соответствующие изменения в остальные исходные данные.

Далее, для каждого считаем

$$\psi_m \left[X \sum_{i=1}^{m} 1/p_i - (Y-R) - \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i R^{(i)}}{p_i}\right] \Big/ \sum_{i=1}^{m} 1/\gamma_i p_i . \quad (5)$$

Если найдется такое $m < n$, что выполняется

$\psi_m > \varphi_{m+1}(R^{(m+1)})$ то через m^* обозначаем наименьшее из таких чисел m.

Если же таких $m < n$ нет, то полагаем $m^* = n$.

После вычисления m^*, числа $y_1, y_2, \dots, y_n$ определяются из следующего соотношения:

$$y_i = [\gamma_i (X - q_i R^{(i)}) - \psi_{m^*}] / \gamma_i p_i , \quad (6)$$

если $i \le m^*$, и $y_i = 0$, если $i > m^*$.

7. Пример расчета на этапе В. Исходные данные приведены в табл. 3.

Таблица 3

i	γ_i	p_i	q_i	$R^{(i)}$
1	5	4	1	100
2	1	3	1	100
3	1	2	1	100
4	2	4	1	50
5	2	2	1	50

$X = 500$; $Y = 400$; $N_1 = \{1,2,3\}$; $N_2 = \{4,5\}$; $R_1 = 100$; $R_2 = 150$; $R = 50$.

Значение $R^{(i)}$ определяется, как указано в п. 6;

$\varphi_1(R) = 2500 - 5R$; $\varphi_1(R^{(1)}) = 2000$;
$\varphi_2(R) = 500 - R$; $\varphi_2(R^{(2)}) = 400$;
$\varphi_3(R) = 500 - R$; $\varphi_3(R^{(3)}) = 400$;
$\varphi_4(R) = 1000 - 2R$; $\varphi_4(R^{(4)}) = 900$;
$\varphi_5(R) = 1000 - 2R$; $\varphi_5(R^{(5)}) = 900$.

Вводим новую нумерацию в порядке убывания $\varphi_i(R^{(i)})$

Таблица 4

$i_{стар}$	$i_{нов}$	γ_i	p_i	q_i	$R^{(i)}$
1	1	5	4	1	100
4	2	2	4	1	50
5	3	2	2	1	50
2	4	1	3	1	100
3	5	1	2	1	100

$N_1 = \{1,4,5\}$; $N_2 = \{2,3\}$; $\varphi_1(R^{(1)}) = 2000$; $\varphi_2(R^{(2)}) = 900$; $\varphi_3(R^{(3)}) = 900$; $\varphi_4(R^{(4)}) = 400$; $\varphi_5(R^{(5)}) = 400$.

Теперь для вычисления ψ_m составим табл. 5.

Таблица 5

m	1	2	3	4	5
$\sum^{m} 1/p_i$	1/4	1/2	1	4/3	11/6
$\sum^{m} 1/\gamma_i p_i$	1/20	7/40	17/40	91/120	151/120
$\sum^{m} q_i R^{(i)}/p_i$	25	37 1/2	62 1/2	95	145 5/6

$\psi_1 = [500 \cdot 1/4 - 250 - 25]/\ 1/20 < 0;$
$\psi_2 = [500 \cdot 1/2 - 250 - 37\ 1/2]/\ 7/40 < 0;$
$\psi_3 = [500 \cdot 1 - 250 - 62\ 1/2]/17/40 = 187\ 1/2 / 17/40 \approx 44$

Итак, мы получили $\psi_3 > \varphi_4(R^{(4)}) = 400.$
Значит, $m^* = 3.$
Теперь определяем y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

$y_1 = [5\ (500 - 100) - 440]\ /20 = 78;$
$y_2 = [2\ (500 - 50) - 440]\ /8 = 57;$
$y_3 = [2\ (500 - 50) - 440]\ /4 = 115;$
$y_4 = y_5 = 0.$

Произведя восстановление старой нумерации, получаем

$$y_1 = 78,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 57,\ y_5 = 115.$$

8. Один шаг итерации в вычислениях на этапах А и Б (случай $k = 1$).

Вычисления на этапах В и Д проводятся по простым схемам с помощью готовых формул пп. 3 и 6. В отличие от них вычисление на этапах А и Б имеет характер итеративного процесса с заранее неизвестным числом шагов.

Укажем схему одного шага итерации в случае $k = 1$, т.е. когда имеется всего один АЭК C_1. Эта схема войдет в схему общего случая.

Итак, имеются исходные данные, упомянутые в п.1 (причем $k = 1$). Предположим также, что у нас есть "старое" значение $R = R_{ст}$. Укажем процедуру для нахождения "нового" значения $R = R_{нов}$, которое и будет результатом шага итерации.

По данному значению $R_{ст}$ в соответствии со схемой п.6 происходит вычисление m^*.

Вычисляем

$$q_{m^*} = 1 - \sum_{i=1}^{m^*} q_i/p_i. \qquad (5)$$

Теперь возможны два случая.

Случай 1: $q_{m^*} \geq 0.$

В этом случае полагаем $R_{нов} = R_{ст}.$

Случай 2: $q_{m^*} < 0.$

В этом случае решаем уравнения вида:

$$\psi_{m^*}(R) = \varphi_i(R),$$

где

$$\varphi_i(R) = \gamma_i (X - q_i R) \quad \text{и}$$

$$\psi_{m^*}(R) = \Big[X \sum_{i=1}^{m^*} 1/p_i - Y + R\Big(1 - \sum_{i=1}^{m^*} q_i/p_i\Big)\Big] \Big/ \sum_{i=1}^{m^*} 1/\gamma_i p_i \qquad (6)$$

(результат преобразования формулы из п.6 с учетом $k = 1$ и $R^{(i)} = R_1 = R$ для всех $i \leq n$).

В результате получаем n решений $R_1^*, R_2^*, \ldots, R_n^*.$
Возникнет два следующих варианта решения задачи:

2а – среди этих решений R_i^* нет такого, которое удовлетворяет $R_{ст} < R_i^* \leq Y.$

В результате определяем $R_{нов} = Y$

2б – найдется такое R_i^*, что $R_{ст} < R_i^* \leq Y.$

В этом случае в качестве $R_{нов}$ берем наименьшее из таких R_i.

Построение $R_{нов}$ закончено.

Если в ходе построения мы пришли к случаю 1 или случаю 2а, то сделанный шаг итерации называем финальным. Если же мы пришли к случаю 2б, то шаг называем нефинальным.

9. Примеры одного шага итерации ($k = 1$)

Пример 1.

Т а б л и ц а 6

i	γ_i	p_i	q_i
1	1	4	1
2	1	4	2
3	1/2	2	1
4	1/2	1	1/2

$X = 500; \quad Y = 200; \quad R_{CT} = 0.$

$\psi_1(R) = \gamma_1(X - q_1 R) = 500 - R, \qquad \psi_1(R_{CT}) = 500;$

$\psi_2(R) = 500 - 2R, \qquad \psi_2(R_{CT}) = 500;$

$\psi_3(R) = 250 - 1/2\,R, \qquad \psi_3(R_{CT}) = 250;$

$\psi_4(R) = 250 - 1/4\,R, \qquad \psi_4(R_{CT}) = 250.$

Нумерацию можно сохранить.

Т а б л и ц а 7

m	1	2	3	4
$\sum^m 1/p_i$	1/4	1/2	1	2
$\sum^m 1/\gamma_i p_i$	1/4	1/2		7/2
$\sum^m q_i/p_i$	1/4	3/4	5/4	7/4
q_m	3/4	1/4	-1/4	-3/4

$\psi_1 = [500 \cdot 1/4 - 200 + 0 \cdot \frac{3}{4}]/1/4 = -300; \quad \psi_2 = 100;$
$\psi_3 = 200; \quad \psi_4 = 229.$

В соответствии с п.6, полагаем $m^* = 4$. Тогда $q_{m^*} = 3/4 < 0$, и мы имеем случай 2 из п.8. Выписываем функцию $\psi_4(R)$:

$\psi_4(R) = [500 \cdot 2 \quad 200 - 3/4R]/7/2 \approx 230 - 3/14R.$

Решаем уравнения $\psi_4(R) = \psi_i(R)$

$i = 1 \quad 230 - 3/14R = 500 - R; \quad 11/14R = 270; \quad R_1^*$ лежит вне $[0,200]$.

$i = 2 \quad 230 - 3/14R = 500 - 2R; \; 25/14R = 270.$

$$R_2^* = \frac{270 \cdot 14}{25} \approx 145.$$

$i = 3 \quad 230 - 3/14R = 250 - 1/2R; \quad R_3^* = \frac{20 \cdot 14}{4} = 70.$

$i = 4 \quad 230 - 3/14R = 250 - 1/4R; \quad R_4^* > 200.$

В интервале $[0,200]$ лежат R_2^* и R_3^*. Берем из них наименьшее: R_3^*, и полагаем $R_{нов} = R_3^* = 70$. Сделанный шаг нефинальный.

Пример 2.

Т а б л и ц а 8

i	γ_i	p_i	q_i
1	5	4	1
2	1	3	1
3	1	2	1

$X = 500; \quad Y = 180; \quad R_{CT} = 0;$

$\psi_1(R) = 2500 - 5R; \qquad \psi_1(R_{CT}) = 2500;$

$\psi_2(R) = 500 - R; \qquad \psi_2(R_{CT}) = 500;$

$\psi_3(R) = 500 - R; \qquad \psi_3(R_{CT}) = 500.$

Нумерация остается.

Т а б л и ц а 9

m	1	2	3
$\sum^m 1/p_i$	1/4	7/12	13/12
$\sum^m 1/\gamma_i p_i$	1/20	23/60	53/80
q_m	3/4	5/12	-1/12

$\psi_1 = [500 \cdot 1/4 - 180 + 0]/1/20 < 0; \quad \psi_2 = [500 \cdot 7/12 - 180]/23/60 \; 294 < 500.$

Значит, $m^* = 3$. Поскольку $q_{m^*} = q_3 < 0$, то имеет место случай 2 из п.8.

Пишем $\psi_3(R) = 410 - 5/53\,R$.

Решаем уравнения $\psi_3(R) = \psi_i(R)$

$i = 1 \quad 410 - 5/53R = 2500 - 5R; \quad R_1^* > 400.$

$i = 2,3 \quad 410 - 5/53\,R = 500 - R; \quad 48/53\,R = 90; \quad R_e^{*} = R \approx 100.$

Таким образом, $R_{нов} = 100$, и сделанный шаг нефинальный.

Пример 3.

Таблица 10

i	γ_i	p_i	q_i
1	5	4	1
2	1	3	1
3	1	2	1

$X = 500;\ Y = 180; \quad R_{ст} = 100;$

$\varphi_1(R) = 2500 - 5R; \quad \varphi_1(R_{ст}) = 2000; \quad \varphi_2(R) = \varphi_3(R) = 500 - R;$
$\varphi_2(R_{ст}) = 400 = \varphi_3(R_{ст}).$

Нумерация остается.

Таблица 11

m	1	2	3
$\sum\limits^{m} 1/p_i$	1/4	7/12	13/12
$\sum\limits^{m} 1/\gamma_i p_i$	1/20	23/60	53/60
g_m	3/4	5/12	-1/12

$\psi_1 = [500 \cdot 1/4 - 180 + 100 \cdot 3/4]\ /\ 1/20 = 400; \quad \psi_2 = [500 \cdot 7/12 - 180 + 100 \cdot 5/12]/23/60 = 402.$

Поскольку $402 > 400 = \varphi_3(R_{ст})$, то $m^{*} = 2$. Тогда $g_{m^*} = g_2 = 5/12 > 0$ и мы имеем случай 1 из п.8. Следовательно, $R_{нов} = R_{ст} = 100$ и сделанный шаг – финальный.

Пример 4.

Таблица 12

i	γ_i	p_i	q_i
1	2	4	1
2	2	2	1

$X = 500; \quad Y = 220; \quad R_{ст} = 0.$

$\varphi_1(R) = 1000 - 2R; \qquad \varphi_1(R_{ст}) = 1000;$

$\varphi_2(R) = 100 - 2R; \qquad \varphi_2(R_{ст}) = 1000.$

Нумерация остается.

Таблица 13

m	1	2
$\sum\limits^{m} 1/p_i$	1/4	3/4
$\sum\limits^{m} 1/\gamma_i p_i$	1/8	3/8
g_m	3/4	1/4

$\psi_1 = (500 \cdot 1/4 - 220)\ /\ 1/8 < 0; \quad \psi_2 = (500 \cdot 3/4 - 220)/3/8 > 0; \quad m^{*} = 2; \quad g_{m^*} > 0.$

Таким образом, имеется случай 1 из п.8, т.е. $R_{нов} = R_{ст} = 0$, и шаг – финальный.

10. Один шаг итерации в вычислениях на этапах А и Б (общий случай).

Пусть у нас имеются исходные данные из п.1, и, кроме того, имеются "старые" значения $R_1^{ст}, R_2^{ст}, \ldots, R_k^{ст}$. Укажем процедуру для нахождения "новых" значений $R_1^{нов}, R_2^{нов}, \ldots, R_k^{нов}$.

1. Вычисляем $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ по схеме п.8 с исходными данными $R_1 = R_1^{ст}, R_2 = R_2^{ст}, \ldots R_k = R_k^{ст}$. Для каждого $j \le k$ полагаем:

$$Y_j = R_j^{ст} + \sum_{i \in N_j} y_i . \tag{7}$$

2. Для каждого $j \le k$ проводим вычисления по схеме п.8 с такими исходными данными $X, Y, R_{ст} = R_j^{ст}$. А таблица γ_i, p_i, q_i для этих вычислений получается из исходной табл. 1 вычеркиванием всех строк с номерами $i \notin N_j$ (иными словами, остаются лишь строки с номерами $i \in N_j$). В результате получаем некоторое число $R_{нов}$ $(\ge R_{ст})$. Полагаем $R_j^{нов} = R_{нов}$.

Таким образом, получены "новые" значения $R_1^{нов}, \dots, R_k^{нов}$. Они и являются результатом шага итерации.

Если для всякого $j \le k$ шаг вычислений по схеме п.8, указанный в 2, является финальным, то весь сделанный шаг (т.е. по совокупности $j \le k$) называем финальным.

11. Стратегия ОС на этапах А и Б. Стратегия состоит в следующем. Полагаем $R_1^1 = R_2^1 = \dots = R_k^1 = 0$ (первое приближение).

Делаем вычисления по схеме п.10 с исходными данными $R_j^{ст} = R_j^1$. Получаем числа $R_j^{нов}$, $j \le k$. Обозначаем их через R_j^2, $j \le k$ (второе приближение). Если сделанный шаг является финальным, то вычисления заканчиваем и полагаем $R_j = R_j^2$ для всех $j \le k$ и $R = R_1 + R_2 + \dots + R_k$. Числа R_j и R будут результатом действий ОС на этапах А и Б.

Если же шаг не является финальным, то полагаем $R_j^{ст} = R_j^2$ для всех $j \le k$, делаем вычисления по схеме п.10 и т.д.

Пример.

Таблица 14

i	γ_i	p_i	q_i	$R^{(i)}$
1	5	4	1	0
2	1	3	1	0
3	1	2	1	0
4	2	4	1	0
5	2	2	1	0

$X = 500$; $Y = 400$; $N_1 = \{1,2,3\}$; $N_2 = \{4,5\}$; $k = 2$.

Первый шаг. Полагаем $R_1^1 = R_2^1 = 0$ (первое приближение) и проводим вычисления по схеме п.8 $\varphi_1(R^{(1)}) = 2500$; $\varphi_2(R^{(2)}) = 500$; $\varphi_3(R^{(3)}) = 600$; $\varphi_4(R^{(4)}) = 1000$; $\varphi_5(R^{(5)}) = 1000$.

Новая таблица после перенумерации.

Таблица 15

$i_{ст}$	$i_{нов}$	γ_i	p_i	q_i	$R^{(i)}$
1	1	5	4	1	0
4	2	2	4	1	0
5	3	2	2	1	0
2	4	1	3	1	0
3	5	1	2	1	0

$\varphi_1(R^{(1)}) = 2600$; $\varphi_2(R^{(2)}) = \varphi_3(R^{(3)}) = 1000$; $\varphi_4(R^{(4)}) = \varphi_5(R^{(5)}) = 500$.

Таблица 16

m	1	2	3	4	5
$\sum^m 1/p_i$	1/4	1/2	1	4/3	11/6
$\sum^m 1/\gamma_i p_i$	1/20	7/20	17/40	91/120	151/120

Дальнейшие вычисления по схеме п.8 дают $m^* = 5$; $y_1 = 105$; $y_2 = 73$; $y_3 = 147$; $y_4 = 30$ и $y_5 = 45$ в новой нумерации и соответственно $y_1 = 105$; $y_2 = 30$; $y_3 = 45$; $y_4 = 73$ и $y_5 = 147$ в старой нумерации.

Таким образом, $Y_1 = 180$; $Y_2 = 220$.

Дальше в соответствии с пунктом 10.2 нужно сделать расчеты по п.8 со следующими исходными данными.

Таблица 17

i	γ_i	p_i	q_i
1	5	4	1
2	1	3	1
3	1	2	1

$X = 500$; $Y = 180$; $R_{ст} = R_1^{ст} = 0$.

Таблица 18

i	γ_i	p_i	q_i
1	2	4	1
2	2	2	1

$X = 500$; $Y = 200$; $R_{ст} = 0$.

Эти вычисления сделаны в п.9 (примеры 2 и 4). Они дают: $R_1^{нов} = 100$, $R_2^{нов} = 0$.

Таким образом, $R_1^2 = 100$ и $R_2^2 = 0$, причем первый шаг итерации не является финальным.

Первый шаг итерации закончен.

Второй шаг. Проведя вычисления по схеме п.6 (с исходными данными $X=500$; $Y=400$; $R_1=100$; $R_2=0$), мы получаем $m^* = 3$ и далее:

$y_1 = 80$; $y_2 = y_3 = 0$; $y_4 = 74$; $y_5 = 146$ (в старой нумерации).

Тем самым, $Y_1 = 180$; $Y_2 = 220$ и нужно сделать расчеты по схеме п.8 с такими исходными данными:

Таблица 19

i	γ_i	p_i	q_i
1	5	4	1
2	1	3	1
3	1	2	1

$X = 500$; $Y = 180$; $R_{ст} = R_1^{ст} = R_1^2 = 100$.

Таблица 20

i	γ_i	p_i	q_i
1	2	4	1
2	2	2	1

$X = 500$; $Y = 220$; $R_{ст} = R_2^{ст} = R_2^2 = 0$.

Эти вычисления сделаны в п.9 (примеры 3 и 4). Они дают $R_1^3 = R_1^{нов} = 100$, $R_2^3 = R_2^{нов} = 0$, причем сделанный шаг итерации – финальный.

Итак, окончательный результат: $R_1 = R_1^3 = 100$ и $R_2 = R_2^3 = 0$.