©2010г. А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

# Вырожденный случай бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности[1]

Предложены новые условия возникновения бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности в квазилинейных системах управления, т.е. условия рождения циклов сколь угодно больших при значениях параметра, близких к критическому.

## 1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)x = M\left(\frac{d}{dt},\lambda\right)F(x,\lambda). \tag{1}$$

динамики одноконтурной системы управления, состоящей из линейного интегрирующего звена, охваченного нелинейной обратной связью. Здесь $L(p,\lambda)$ и $M(p,\lambda)$ — взаимно простые многочлены степеней $\ell > m$ с вещественными коэффициентами, все компоненты уравнения зависят от скалярного параметра $\lambda \in \Lambda = (a,b)$, непрерывная нелинейность $F(x,\lambda)$ предполагается равномерно ограниченной и стационарной: функция $F$ не зависит от времени. Основной вариант — функциональная нелинейность $x(t) \mapsto f(x(t),\lambda)$, где $f : \mathbb{R}\times\Lambda \to \mathbb{R}$ — непрерывная по совокупности переменных функция.

*Определение 1. Значение $\lambda_0$ параметра называется* точкой бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности[2] *(далее, для краткости,* точка бифуркации*) для уравнения* (1) *с частотой $w_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\lambda_\varepsilon \in (\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$, что уравнение* (1) *при $\lambda = \lambda_\varepsilon$ имеет периодическое решение $x_\varepsilon(t)$ периода $T_\varepsilon$, причем $|T_\varepsilon - 2\pi/w_0| < \varepsilon$ и $\max|x_\varepsilon(t)| > \varepsilon^{-1}$.*

Иными словами, менее формально, $\lambda_0$ — точка бифуркации с частотой $w_0$, если при сколь угодно близких к $\lambda_0$ значениях параметра $\lambda$ уравнение (1) имеет периодические решения сколь угодно больших амплитуд и периодов, произвольно близких к $T_0 = 2\pi/w_0$. Более наглядное, хотя и менее общее определение: $\lambda_0$ — точка бифуркации, если существует (при разных $\lambda$) континуум периодических решений, который можно непрерывно запараметризовать параметром $r \in [r_0,\infty)$ следующим образом: для дифференциального уравнения (1) существуют непрерывные кривые $\lambda = \lambda_r$ значений параметра и начальных значений $x_r^0 \in \mathbb{R}^\ell$

[1]Автор поддержан грантом Российского Фонда Фундаментальных Исследований 10-01-93112-НЦНИЛ_а.

[2]Для локального аналога используются также термины “бифуркация рождения цикла”, “бифуркация Хопфа”, “бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа” — это одно и то же.

периодических решений периода $T_r$ при $\lambda = \lambda_r$ такие, что при $r \to \infty$ справедливы соотношения $\lambda_r \to \lambda_0$, $T_r \to T_0$ и $\|x_r^0\|_{\mathbb{R}^\ell} \to \infty$.

Локальные бифуркации Андронова–Хопфа — классический объект исследований математиков, инженеров, специалистов по теории управления, физиков, биологов и пр. Разнообразным методам исследования таких бифуркаций посвящена обширная литература (определение, условия, свойства, см., например, [1–3]). В основном применяются аналитические методы и методы, основанные на теореме о неявной функции, однако используются и геометрические и топологические подходы (см., например, [4, 5]). Важную роль при исследовании локальных бифуркаций играет потеря устойчивости.

Понятие бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности было введено в [6] для случая общих уравнений в $\mathbb{R}^n$, там же сформулированы условия возникновения бифуркации на бесконечности, определяемые главной линейной частью (в том числе и для систем с гистерезисными нелинейностями). В последние 30 лет теория бифуркации на бесконечности разрабатывалась в работах многих авторов. В [7] вместо непрерывности функциональной нелинейности по фазовым переменным предполагается лишь ее кусочная непрерывность, формулировки (не методы!) близки к [6]. В [8] и многих других работах С. Рыбицкого (S. Rybicki) задачи о бифуркациях Андронова–Хопфа на бесконечности исследуются в предположении гамильтоновости изучаемых систем, предположения всех последующих утверждений исключают гамильтонов случай. В [9] существенно используется двумерность изучаемых систем. Сформулируем основной результат из [6] для случая уравнения (1).

Утверждение 1. *Предположим, что многочлен $L(p, \lambda)$ имеет пару простых сопряженных корней $\sigma(\lambda) \pm w(\lambda)i$, зависящих непрерывно от $\lambda$, где $\sigma(\lambda_0) = 0$ и пусть функция $\sigma(\lambda)$ принимает значения обоих знаков в каждой окрестности точки $\lambda_0$ (например, $\lambda_0$ — это ноль гладкой функции $\sigma(\lambda)$ и $\sigma'(\lambda_0) \neq 0$). Предположим, что $L(kw(\lambda_0)i, \lambda_0) \neq 0$ для $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$ Тогда $\lambda_0$ — точка бифуркации для уравнения* (1) *с частотой $w(\lambda_0)$.*

Подчеркнем, что в условиях утверждения 1 существование бифуркации определяется только линейной частью уравнения (1), от нелинейности требуются[3] непрерывность и ограниченность, которая может быть заменена оценками на рост нелинейности на бесконечности. Гладкость (липшицевость, дифференцируемость и пр.) нелинейности (как, впрочем, и функции $\sigma$) в утверждении 1 и далее во всех теоремах роли не играет.

В [10] был рассмотрен иной случай, когда основное уравнение имело вид

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)F(x, \lambda) \tag{2}$$

с нелинейностью $F(x, \lambda)$ специального вида $f(x(t), \lambda) + g(x(t - \Delta), \lambda)$ с запаздыванием. В уравнении (2) линейная часть (многочлены $L$ и $M$) вообще не зависит от параметра, условия

[3]Еще предполагается, что стационарная нелинейность $F$ переводит периодическую функцию любого периода в периодическую того же периода. Так устроены многие функциональные (например, $x(t) \mapsto f(x(t))$, $x(t) \mapsto f(x(t), x(t - \Delta))$, $x(t) \mapsto f(x(t), x'(t))$ и пр.) и гистерезисные (модель Прейсаха, модель Прандтля–Ишлинского, гистероны) стационарные нелинейности.

утверждения 1 не могут быть выполнены, возможные точки бифуркации на бесконечности в основном определяются ограниченными непрерывными функциями $f$ и $g$. Сформулируем соответствующий результат работы [10] для уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f\big(x(t),\lambda\big) \tag{3}$$

без запаздывания, именно это уравнение изучается в основной части настоящей работы. По-прежнему $L(p)$ и $M(p)$ — это вещественные многочлены степеней $\ell > m$, функция $f(x,\lambda) : \mathbb{R}\times\Lambda \to \mathbb{R}$ непрерывна и равномерно ограничена.

Рассмотрим функцию $f_{odd}(x,\lambda) = (f(x,\lambda) - f(-x,\lambda))/2$ и положим

$$\Psi(r,\lambda) = \int_0^{2\pi} \sin t\, f(r\sin t,\lambda)\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin t\, f_{odd}(r\sin t,\lambda)\,dt; \tag{4}$$

функция (4) в теории управления называется описывающей (*describing function*, [11–13]).

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия:*

1. *число $w_0$ — корень многочленов $L(wi)$ и $\Im m\,(L(wi)M(-wi))$ одной и той же нечетной кратности $K$;*

2. *соотношения $L(kw_0i) \neq 0$ верны для всех $k = 0,2,3,4,\ldots$;*

3. *для каждого $\lambda$ из окрестности точки $\lambda_0$ существует предел*

$$\psi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r\to+\infty} \Psi(r,\lambda); \tag{5}$$

4. *пусть функция $\psi(\lambda)$ принимает значения обоих знаков в каждой окрестности $\lambda_0$.*

*Тогда $\lambda_0$ является точкой бифуркации для уравнения* (3) *с частотой $w_0$.*

Так как $\Im m\,(L(wi)M(-wi)) \not\equiv 0$ в условиях утверждения 2, то хотя бы один из многочленов $L(p)$ или $M(p)$ содержит слагаемые нечетной степени: $\Im m\,(L(wi)M(-wi)) \equiv 0$, если и только если оба взаимно простых многочлена $L(p)$ и $M(p)$ четные. В этом случае соответствующая уравнению (3) векторная система первого порядка в $\ell$-мерном пространстве гамильтонова; если многочлен $L(p)$ удовлетворяет условию 2 утверждения 2, то уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(x)$$

(без параметра!) имеет континуум циклов $x(t;r)$, $r \geq r_0$, $x(t+T(r)) = x(t)$ больших амплитуд $\|x(t;r)\|_C \to \infty$, удовлетворяющих условию $T(r) \to 2\pi/w_0$ при $r \to \infty$, здесь $r$ — это параметризация семейства циклов. Формально, в гамильтоновом случае все значения $\lambda \in \Lambda$ — это точки бифуркации с частотой $w_0$.

Простейший явный пример: в силу утверждения 2 значение параметра $\lambda_0 = 0$ является точкой бифуркации на бесконечности для уравнения $x''' + x'' + x' + x = \lambda \operatorname{arctg} x$.

Предел (5) существует, в частности, если при всех $\lambda$ выполняются условия насыщения

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,\lambda) = f^+(\lambda), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x,\lambda) = f^-(\lambda),$$

при этом $\psi(\lambda) = 2(f^+(\lambda) - f^-(\lambda))$. Если $\psi(\lambda_0) \neq 0$, то $\lambda_0$ не является точкой бифуркации.

Далее в работе рассматривается вырожденный случай, когда $f(x,\lambda) \to 0$ на бесконечности, при этом $\psi(\lambda) \equiv 0$, основное условие 4 утверждения 2 не может быть выполнено.

## 2. Основной результат

Пусть число $w_0$ является корнем многочлена $L(wi)$. Из взаимной простоты многочленов $L$ и $M$ следует, что $M(w_0 i) \neq 0$.

Пусть нелинейность $f$ затухает на бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,\lambda) = 0. \tag{6}$$

Более того, пусть нелинейность $f$ удовлетворяет равномерной оценке

$$|f(x,\lambda)| \leqslant \Theta(|x|), \tag{7}$$

фиксированная непрерывная функция $\Theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не возрастает и удовлетворяет условию

$$\int^{\infty} u\Theta(u)\,du < \infty. \tag{8}$$

*Теорема 1. Пусть выполнены условия:*

1. *степени многочленов $L$ и $M$ удовлетворяют условию $\ell > m+1$;*
2. *число $w_0$ является корнем многочленов $L(wi)$ и $\Im m\,(L(wi)M(-wi))$ одной и той же нечетной кратности $K$;*
3. *соотношения $L(kw_0 i) \neq 0$ верны для всех $k = 0, 2, 3, 4, \ldots$;*
4. *пусть функция*

$$\varphi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u\, f(u,\lambda)\,du \tag{9}$$

*принимает значения обоих знаков в каждой окрестности $\lambda_0$.*

*Тогда $\lambda_0$ является точкой бифуркации для уравнения* (3) *с частотой $w_0$.*

Доказательство теоремы 1 вынесено в Приложение.

## 3. Замечания

1. В силу (7) предел в (6) равномерный по $\lambda$, в силу (7) и (8) интегралы в (9) абсолютно сходятся равномерно по $\lambda$, функция $\varphi$ непрерывна. Для выполнения условия 4 достаточно, чтобы $\varphi(\lambda_0) = 0$ и функция $(\lambda - \lambda_0)\varphi(\lambda)$ принимала бы значения одного и того же знака в проколотой окрестности точки $\lambda_0$. Более сильное достаточное условие: функция $\varphi$ дифференцируема (например, $|f'_\lambda(x,\lambda)| \leqslant \Theta(|x|)$ ), $\varphi'(\lambda_0) \neq 0$.

2. Условие 1 — дополнительное ограничение, в утверждениях 1 и 2 предполагалось лишь, что $\ell > m$. Это условие используется в доказательстве при получении оценки $\|h\|_{C^1}$ в лемме 2; не понятно, как получать аналогичные оценки без условия 1. Условие 2 означает, что

$$\lim_{w\to w_0} |w - w_0|^{-K} |\Re e\,(L(wi)M(-wi))| < \infty,$$

т.е. либо число $w_0$ является корнем многочлена $\Re e\,(L(wi)M(-wi))$ конечной кратности не меньше $K$, либо $\Re e\,(L(wi)M(-wi)) \equiv 0$.

3. Случай, когда изучаемое уравнение имеет вид

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)\big(\gamma(\lambda) + f(x(t),\lambda)\big)$$

и $f$ удовлетворяет условиям теоремы 1, сводится к теореме 1 с помощью замены переменных $x := x + \tilde{\gamma}(\lambda)$, где $\tilde{\gamma}(\lambda) = \gamma(\lambda)M(0)/L(0)$, при этом уравнение приобретает вид

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f\big(\tilde{\gamma}(\lambda) + x(t),\lambda\big).$$

Это рассуждение приводит к следующему простому примеру.

Рассмотрим уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(\lambda + x)$$

(с уже сделанной заменой переменных, функция $f$ от $\lambda$ не зависит). Если $|f(x)| \leqslant \Theta(|x|)$, то естественно предполагать, что $|f(\lambda + x)| \leqslant \Theta(|x|)$ при всех $\lambda$ из любого ограниченного промежутка. Для нелинейности $f(x,\lambda) = f(\lambda + x)$ функция $\varphi$ имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, f(\lambda + u)\, du = I_1 - \lambda I_0, \qquad I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u\, f(u)\, du.$$

Пусть $I_0 \neq 0$, в частности, функция $f$ не является нечетной. Функция $\varphi$ обращается в ноль в единственной точке $\lambda_0 = I_1/I_0$ и меняет в ней знак. Следовательно, $\lambda_0$ — точка бифуркации.

Приведем один совсем частный пример: для уравнения $x''' + x'' + x' + x = \lambda + (x+1)/(x^4+1)$ справедливы равенства $I_0 = I_1 = \pi/\sqrt{2}$, поэтому $\lambda_0 = 1$ — точка бифуркации.

4. В условиях теоремы 1 функция $\psi$ из утверждения 2 определена и тождественно равна нулю, утверждение 2 не применимо. Теорема 1 логично располагается в общем ряду с утверждениями 1 и 2: утверждение 2 охватывает существенную часть вырожденных случаев утверждения 1, теорема 1 охватывает основной вырожденный случай утверждения 2.

Этот ряд вряд ли может быть продолжен, этот факт иллюстрирует различие между локальными бифуркациями Андронова–Хопфа в окрестности нуля и на бесконечности.

В нуле гладкая нелинейность раскладывается в ряд Тейлора и старшие однородные нелинейные слагаемые (кубические) определяют наличие бифуркации, если линейная часть не зависит от $\lambda$. Если кубические слагаемые также вырождены, то можно указать алгоритм нахождения следующих однородных слагаемых, определяющих наличие бифуркации.

На бесконечности ситуация иная. Есть линейный случай, охваченный утверждением 1. Есть случай вырожденных в линейном приближении уравнений, отчасти охваченный утверждением 2, там бифуркации определяются старшими однородными слагаемыми порядка 0. Если слагаемые порядка 0 вырождаются, то может быть применима теорема 1, её условия не зависят от порядка главных однородных слагаемых. А вот если вырождается функция $\varphi$ (например, функция $f$ четная, тогда $\varphi \equiv 0$), то непонятно, как и какие следующие слагаемые и компоненты определяют наличие или отсутствие бифуркации.

5. Подчеркнем важную особенность теоремы 1. Условиям теоремы могут удовлетворять нелинейности $f$ с носителем на ограниченном промежутке: $f(x,\lambda) = 0$ при $|x| \geqslant x_0$. На

первый взгляд, странно, что изменение по $\lambda$ функции $f(x,\lambda)$ на ограниченном промежутке значений $x$ определяет существование периодических решений сколь угодно больших амплитуд. Причина простая — в условиях теоремы 1 уходящие в бесконечность циклы имеют "круглую" форму, функция $x(t)$ пробегает все значения из интервала $\{|x| \leqslant x_0\}$.

6. Пусть функция $\varphi$ гладкая и $\varphi'(\lambda_0) \neq 0$. Пусть $w_0$ — простой корень многочленов $\Re e\,(L(wi)M(-wi))$ и $\Im m\,(L(wi)M(-wi))$, пусть $\Re e\,(L(wi)M(-wi)) = \mu(w-w_0) + o(w-w_0)$. Пусть периодические решения больших амплитуд $r$ имеют период $2\pi/w_r$ и являются решениями уравнения (3) при $\lambda = \lambda_r$. Тогда (как следует из приводимого в Приложении доказательства) величины $w_r - w_0$ и $\lambda_r - \lambda_0$ связаны при $r \to +\infty$ асимптотическими равенствами

$$\pi r^3 \mu(w_r - w_0) \approx (\lambda_r - \lambda_0)\varphi'(\lambda_0), \qquad w_r - w_0 = o(r^{-3,33}).$$

Какие следующие слагаемые определяют асимптотики величин $w_r - w_0$ и $\lambda_r - \lambda_0$ по $r$, каковы эти асимптотики и как их считать, автору не известно. Из предлагаемого доказательства теоремы 1 формулы для асимптотик не видны.

7. Справедливы аналоги теоремы 1 для близких к (3) уравнений с запаздыванием

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f\big(x(t-\Delta),\lambda\big) \tag{10}$$

или

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)\big(f(x(t),\lambda) + g(x(t-\Delta),\lambda)\big). \tag{11}$$

Приведем без доказательства утверждение для уравнения (10) (его аналог для (11) несколько более громоздкий). Пусть $f$ удовлетворяет условию (7), определим по $f$ функцию (9).

*Теорема 2. Пусть выполнены условия* 1, 3 *и* 4 *теоремы 1, вместо условия* 2 *пусть выполнено менее ограничительное условие*

2′. *Число $w_0$ является корнем многочлена $L(wi)$ нечетной кратности $K$*

*и пусть справедливо дополнительное условие невырожденности*

5. $\displaystyle\lim_{w\to w_0} \frac{\Im m\,\big(L(wi)M(-wi)e^{w_0\Delta i}\big)}{(w-w_0)^K} \neq 0.$

*Тогда $\lambda_0$ является точкой бифуркации для уравнения* (10) *с частотой $w_0$.*

При $\Delta = 0$ условия 2′ и 5 теоремы 2 совпадают с условием 2 теоремы 1.

Запаздывание $\Delta$ может также зависеть от параметра.

Аналоги теорем 1 и 2 для уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f\big(x(t),x(t-\Delta),\lambda\big) \tag{12}$$

(с двуместной функцией $f$) автору не известны. Аналоги (см. [10]) утверждения 2 справедливы для уравнения (12), если существуют равномерные радиальные пределы

$$\lim_{r\to+\infty} f(rx,ry) = \Phi(x,y).$$

# 4. Заключение

Предложены новые условия возникновения бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности в квазилинейных системах управления. В главном, классическом случае линейная часть системы зависит от параметра, возникновение бифуркации определяется линейной частью. Если линейная часть не зависит от параметра, то бифуркации определяются старшими нелинейными слагаемыми. В этом случае наиболее просто формулы выглядят для нелинейностей (функциональных или гистерезисных) с насыщением, здесь возникновение бифуркации определяется зависящей от параметра разностью между уровнями насыщения на $+\infty$ и на $-\infty$. В настоящей работе рассматриваются системы с убывающей к нулю на бесконечности нелинейностью, т.е. слагаемое с насыщением отсутствует. Исследование этого случая основано на точных асимптотиках на бесконечности проекций нелинейностей на двумерные подпространства главных гармоник.

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

*1. Замена переменных.* Мы ищем периодические решения уравнения (3) периодов $2\pi/w$ с неизвестным $w$, близким к $w_0$. Сделаем замену времени в (3), рассмотрим уравнение

$$L\left(w\frac{d}{dt}\right)x = M\left(w\frac{d}{dt}\right)f\big(x(t),\lambda\big). \tag{П.1}$$

Очевидно, $x(wt)$ является $2\pi/w$-периодическим решением уравнения (3), если и только если $x(t)$ — это $2\pi$-периодическое решение уравнения (П.1).

По предположению, многочлен $L(wp)$ переменной $p$ имеет корни $\pm i$ для $w = w_0$; соотношения $M(\pm wi) \neq 0$ и $L(\pm kwi) \neq 0$, $k = 0, 2, 3, \ldots$ выполнены для $w = w_0$, поэтому они верны для любых $w$ из фиксированной достаточно малой окрестности $\Omega$ точки $w_0$.

Покажем, что при больших $r > 0$ уравнение (П.1) имеет $2\pi$-периодическое решение

$$x(t) = r\sin t + h(t), \tag{П.2}$$

где $h(t) \perp \sin(t+\phi)$ в $L^2 = L^2(0, 2\pi)$ при $\phi \in \mathbb{R}$. Точнее, при каждом достаточно большом $r > 0$ найдутся такие числа $w$ и $\lambda$ и функция $h(t)$, что (П.2) является решением уравнения (П.1). Так как $r$ произвольно велико, то и амплитуда решения (П.2) тоже произвольно велика.

Сделаем два “философских” замечания.

Во-первых, в силу автономности уравнения (П.1) каждое непостоянное периодическое решение $x$ порождает континуум различных периодических решений $\{x(t+\phi),\ \phi \in \mathbb{R}\}$, т.е. вместе с решением (П.2) уравнение (П.1) имеет решение $r\sin(t+\phi) + h(t+\phi)$. Фиксируя начальную фазу $\phi$, выбираем единственное решение из континуума $x(t+\phi)$ (решение, ортогональное $\cos t$ и с положительным коэффициентом Фурье при $\sin t$).

Во-вторых, исходная задача зависела от параметра $\lambda$. Ищутся решения $x(t) = r\sin wt + \eta\cos wt + h(wt)$ неизвестного заранее периода $2\pi/w$ с неизвестными коэффициентами Фурье $r$ и $\eta$ и неизвестной компонентой $h(\cdot)$. Таким образом, есть параметр $\lambda$ и 4 неизвестных: $r$, $\eta$, $w$, $h(\cdot)$; при этом каждое решение вложено в континуум решений, отличающихся сдвигом фаз

времени. Теперь коэффициент $r$ рассматривается в качестве параметра, фаза $\phi$ фиксируется ($\eta = 0$), неизвестными являются $w$, $\lambda$, $h(t)$. Такой выбор параметров и неизвестных делает возможным исследование задачи топологическими методами.

Этот подход к исследованию циклов был предложен в 2000г. А.М. Красносельским и Д.И. Рачинским. С его помощью получен ряд результатов о задачах с параметром (бифуркации Андронова–Хопфа в нуле и на бесконечности, в том числе вырожденные случаи, существование глобальных ветвей циклов) и без параметра (о существовании изолированных циклов и их последовательностей).

*2. Топологическая лемма.* Пусть $E$ — банахово пространство. Рассмотрим систему

$$B_1(w,\lambda,h) = 0, \quad B_2(w,\lambda,h) = 0, \quad h = B_3(w,\lambda,h) \tag{П.3}$$

с неизвестными $h \in E$, $w \in \Omega$, $\lambda \in \Lambda$.

Пусть операторы $B_1, B_2 : \Omega \times \Lambda \times E \to \mathbb{R}$ непрерывны по совокупности переменных и оператор $B_3 : \Omega \times \Lambda \times E \to E$ вполне непрерывен по совокупности переменных. Пусть $B_3$ преобразует всю область определения в некоторый шар $Z \subset E$. Обозначим множество всех неподвижных точек оператора $B_3$ (при всех $w \in \Omega$ и $\lambda \in \Lambda$) через $Z^* \subset Z$.

*Лемма 1. Пусть найдутся промежутки* $[w_1, w_2] \subset \Omega$, $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \Lambda$ *такие, что*

$$B_1(w_1,\lambda,h)\ B_1(w_2,\lambda,h) < 0 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in [\lambda_1,\lambda_2],\ h \in Z^*;$$
$$B_2(w,\lambda_1,h)\ B_2(w,\lambda_2,h) < 0 \quad \text{для всех} \quad w \in [w_1,w_2],\ h \in Z^*.$$

*Тогда система* (П.3) *имеет по крайней мере одно решение* $w \in [w_1, w_2]$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $h \in Z$.

Основное условие означает, что функции $B_i$ принимают на концах промежутков $\Omega$ и $\Lambda$ значения разных знаков. Доказательство леммы 1 основано на формуле произведения вращения (см. [14]) векторных полей, утверждение леммы непосредственно следует из варианта этой формулы, приведенного в [15]. В условиях леммы вращение $\gamma_1$ бесконечномерного поля $h - B_3(w,\lambda,h)$ в пространстве $E$ при каждом фиксированном $w$, $\lambda$ на границе шара $Z$ равно 1. Вращение $\gamma_2$ двумерного поля

$$\{B_1(w,\lambda,h),\ B_2(w,\lambda,h)\}$$

на границе прямоугольника $T = \{w \in (w_1, w_2), \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)\}$ принимает при всех $h \in Z^*$ либо значение 1, либо значение $-1$ (общее для всех $h$). Из формуле произведения вращений следует, что вращение $\gamma_0$ поля

$$\{B_1(w,\lambda,h),\ B_2(w,\lambda,h),\ h - B_3(w,\lambda,h)\}$$

на границе области $T \times Z$ в пространстве $\mathbb{R}^2 \times E$ равно $\gamma_1\gamma_2$, т.е. $|\gamma_0| = 1$. Следовательно, в этой области существует по крайней мере одно решение системы (П.3). ■

*3. Линейные операторы.* Рассмотрим в пространстве $L^2 = L^2[0, 2\pi]$ скалярнозначных функций подпространство $E$ функций, не имеющих в ряду Фурье гармоник $\sin t$ и $\cos t$, т.е. множество функций $h$, удовлетворяющих

$$\int_0^{2\pi} \sin t\, h(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \cos t\, h(t)\ dt = 0.$$

Рассмотрим ортогональные проекторы

$$Pu(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t-s)\, u(s)\, ds$$

на плоскость $\Pi = \{r \sin t + \eta \cos t\}$ и $Q = I - P$ на $E$. Каждый из проекторов $P$ и $Q$ коммутирует с оператором $A(w)$.

Рассмотрим линейный оператор $A(w)$, переводящий каждую функцию $u(t) \in E$ в единственное $2\pi$-периодическое решение $x(t) = A(w)u(t) \in E$ уравнения

$$L\left(w\frac{d}{dt}\right) x(t) = M\left(w\frac{d}{dt}\right) u(t). \tag{П.4}$$

Существование оператора $A(w)$ следует из предположения 3 теоремы 1. Оператор $A(w)$ действует в $E$ и вполне непрерывен по совокупности переменных $w \in \Omega, u \in E$. Продолжим оператор $A(w)$ на все пространство $L^2$ до оператора $\tilde{A}(w) : L^2 \to L^2$ соотношением $\tilde{A}(w)u = A(w)Qu$. Оператор $\tilde{A}(w)$ вполне непрерывен в $L^2$, он может быть продолжен с $L^2$ до $L^1$, сохраним обозначение $\tilde{A}(w)$ за продолженным оператором тоже. В силу предположения 1 теоремы 1 оператор $\tilde{A}(w)$ действует и непрерывен, как оператор из $L^1$ в $C^1$, нормы операторов $\tilde{A}(w)$ равномерно по $w$ ограничены (во всех разумных пространствах).

Спроектируем уравнение (П.1) на плоскость $\Pi$ и на ортогональное дополнение $E$. Полученная эквивалентная система уравнений состоит из двух скалярных уравнений на плоскости и уравнения $h = A(w)Qf(x, \lambda)$, уравнения на плоскости ниже будут переписаны, так чтобы результат приобрел вид (П.3).

*4. Априорные оценки компоненты $h$ и проекций нелинейности $f$.* Пусть $h = A(w)Qf(r \sin t + h(t), \lambda)$ при некоторых $w$ и $\lambda$.

*Лемма 2. В условиях теоремы 1 при некотором $c > 0$ (не зависящем от $w, \lambda, h$) справедливы оценки*

$$U(r) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \Theta(|r \sin t + h(t)|)\, dt \leqslant cr^{-2/3} \quad \text{и} \quad \|h\|_{C^1} \leqslant cr^{-2/3}. \tag{П.5}$$

Доказательство леммы состоит из нескольких отдельных шагов.

Шаг 1. Так как функция $f$ равномерно ограничена, а операторы $\tilde{A}(w)$ действует из $C$ в $C$ и ограничены, то из $h = A(w)Qf(x, \lambda)$ следует априорная равномерная оценка $\|h\|_C \leqslant \rho_1$ при некотором $\rho_1 > 0$, не зависящем ни от $w$, ни от $\lambda$.

Шаг 2. Для оценки величины $U(r)$ при каждом $\delta > 0$ разобьем промежуток $[0, 2\pi]$ на две части: $[0, 2\pi] = G_1 \bigcup G_2,\ G_1 \bigcap G_2 = \emptyset$, где

$$G_1 = G_1(\delta) = \{t : |\sin t| \leqslant \delta\} \quad \text{и} \quad G_2 = G_2(\delta) = \{t : |\sin t| > \delta\}.$$

Теперь

$$\int_{G_1} \Theta(|r\sin t + h(t)|)\,dt \leqslant \Theta(0)\operatorname{mes} G_1 \leqslant 2\pi\Theta(0)\delta \quad \text{и} \quad \int_{G_1} \Theta(|r\sin t + h(t)|)\,dt \leqslant 2\pi\Theta(r\delta - \rho_1).$$

Если выбрать $\delta = r^{-2/3}$ и воспользоваться вытекающим из (8) соотношением $u^2\Theta(u) = o(1)$, то получим первую оценку (П.5).

Шаг 3. Вторая оценка (П.5) следует из первой оценки (П.5) и непрерывности оператора $\tilde{A}(w)$ как оператора из $L^1$ в $C^1$. Лемма 2 доказана. ■

Из этой леммы следует основная оценка:

$$\Big|\int_0^{2\pi} h'(t) f(r\sin t + h(t), \lambda)\,dt\Big| \leqslant c_0 r^{-4/3}, \qquad c_0 = 2\pi c^2, \tag{П.6}$$

справедливая для всех $w, \lambda, h$, удовлетворяющих соотношению $h = A(w)Qf(x,\lambda)$.

*5. Асимптотики проекций нелинейности.* Этот раздел содержит утверждение (лемму 3), сформулированное и доказанное в [16] для функций $f$ вида $f(t,x)$, следствие 1 — это его более простой вариант для автономного случая.

Пусть у функции $e : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$, $e \in C^1$ есть единственный нуль $t_0 \in (t_1, t_2)$. Пусть

$$e(t_0) = 0,\ e(t) = (t - t_0)\big(e' + \beta(t)\big),\ e' \neq 0,\ |\beta'(t)| \leqslant c_\beta, \quad |\beta(t)| \to 0,\ t \to t_0. \tag{П.7}$$

Пусть на этом же промежутке задана еще функция $q(t) \in C$, причем

$$|q(t)(t - t_0)^{-k} - q^{(k)}| \leqslant \alpha(t), \quad \alpha(t) \to 0,\ t \to t_0; \quad q^{(k)} \in \mathbb{R} \tag{П.8}$$

при некотором целом неотрицательном $k$, ниже используются случай $k = 1$. Если $k = 0$, то условие (П.8) всегда выполнено при $q^{(0)} = q(t_0)$. Если $k > 0$, то при $q \in C^k$ условие (П.8) означает, что $q(t_0) = q'(t_0) = \ldots = q^{(k-1)}(t_0) = 0$; $q^{(0)} = q^{(k)}(t_0)$.

Зададимся монотонно убывающей функцией $\Theta : [0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей

$$\int^{\infty} u^k \Theta(u)\,du < \infty \tag{П.9}$$

($k$ — число из (П.8), при $k = 1$ условие (П.9) совпадает с (8)). Построим по функции $\Theta$ множество $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Theta)$ функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих

$$|f(x)| \leqslant \Theta(|x|).$$

Оценим при всех $f \in \mathcal{G}$ интеграл

$$I_0 = I_0(q, e, h) = \int_{t_1}^{t_2} q(t) f\big(re(t) + h(t)\big)\,dt.$$

*Лемма 3. При каждом $\eta > 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{G};\, \|h\|_{C^1} \leqslant \eta} \Big| r^{k+1} I_0 - \operatorname{sign}(e')(e')^{-k-1} q^{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} u^k f\big(u + h(t_0)\big)\,du \Big| = 0.$$

Для целей доказательства нам нужен случай $q(t) = e(t) = \sin t$, $k = 1$. Применим лемму 3 отдельно к промежуткам $(-\delta, \delta)$ и $(\pi - \delta, \pi + \delta)$, где $\delta > 0$ — фиксированное число (например, 1/10), на каждом из этих промежутков $e$ удовлетворяет (П.7) ($e' = (-1)^j$ при $t_0 = \pi j \in (\pi j - \delta, \pi j + \delta)$).

При всех $\lambda$ функции $f(x, \lambda)$ в силу (7) принадлежат классу $\mathcal{G}$.

*Следствие 1. Пусть выполнено условие* (7), *тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda,\, \|h\|_{C^1}\leqslant cr^{-2/3}} \left| r^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin t\, f(r\sin t + h(t), \lambda) - 2\varphi(\lambda)\, dt \right| = 0. \tag{П.10}$$

Здесь $\varphi(\lambda)$ — это функция (9), постоянная $c$ — из леммы 2.

Равенство (П.10) следует из леммы 3. При $e(t) = q(t) = \sin t$, $k = 1$ в силу леммы при $t_0 = \pi j$ $(j = 0, 1)$ равномерно по $h$

$$r^2 \int\limits_{\pi j-\delta}^{\pi j+\delta} \sin t\, f(r\sin t + h(t), \lambda)\, dt \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\, f(u + h(\pi j), \lambda) du,$$

снова $e' = q^{(1)} = (-1)^j$ в точке $\pi j$. Интегралы по промежуткам $(\delta, \pi - \delta)$ и $(\pi + \delta, 2\pi - \delta)$ — бесконечно малые более высокого порядка, чем $r^{-2}$, в силу предположения (8). Так как $\|h\|_C \to 0$ при $r \to \infty$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u\, f(u + h(\pi j), \lambda) du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (u - h(\pi j))\, f(u, \lambda) du \to \varphi(\lambda). \qquad \blacksquare$$

*6. Скалярные уравнения.* Умножим уравнение (П.4) на $\sin t$ (соответственно, на $\cos t$) и проинтегрируем по промежутку $[0, 2\pi]$. Последующая лемма описывает полученный результат и приводит его к виду (П.3).

*Лемма 4. Пусть функция* $x(t) = r\sin t + h(t)$, $h \in E$, $u \in C$ *удовлетворяет* (П.4). *Тогда*

$$\pi \Re e\, \frac{L(wi)}{M(wi)} r = \int_0^{2\pi} \sin t\, u(t)\, dt, \tag{П.11}$$

$$\pi \Im m\, \frac{L(wi)}{M(wi)} r = \int_0^{2\pi} \cos t\, u(t)\, dt. \tag{П.12}$$

Доказательство леммы 4 см. в [10], приведем основные формулы. В силу (П.4)

$$L\left(w\frac{d}{dt}\right)(r\sin t) = M\left(w\frac{d}{dt}\right) Pu(t).$$

Иными словами,

$$\begin{aligned}
\pi \Re e\,(L(wi)) r\sin t + \pi \Im m\,(L(wi)) r\cos t = \\
= (\Re e\,(M(wi))\cos t - \Im m\,(M(wi))\sin t) \int_0^{2\pi} \cos s\, u(s) ds + \\
+ (\Re e\,(M(wi))\sin t + \Im m\,(M(wi))\cos t) \int_0^{2\pi} \sin s\, u(s) ds,
\end{aligned}$$

поэтому

$$\pi\Re e\,(L(wi))r = -\Im m\,(M(wi))\int_0^{2\pi}\cos s\ u(s)\,ds + \Re e\,(M(wi))\int_0^{2\pi}\sin s\,u(s)\,ds,$$
$$\pi\Im m\,(L(wi))r = \ \Re e\,(M(wi))\int_0^{2\pi}\cos s\ u(s)\,ds + \Im m\,(M(wi))\int_0^{2\pi}\sin s\,u(s)\,ds.$$

Умножая первое из этих равенств на $\Re e\,(M(wi))$, второе — на $\Im m\,(M(wi))$ и складывая полученные результаты получаем (П.11), равенство (П.12) доказывается аналогично. ■

*7. Завершение доказательства теоремы 1.* Рассмотрим систему

$$\text{(П.13)}\qquad \begin{cases} \pi\Re e\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)}r = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin t\,f(r\sin t + h(t),\lambda)\,dt,\\ \pi\Im m\,\dfrac{L(wi)}{M(wi)}r = \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos t\,f(r\sin t + h(t),\lambda)\,dt,\\ \qquad\qquad h = A(w)Qf(r\sin t + h(t),\lambda). \end{cases}$$

В силу леммы 4 функция $x(t) = r\sin wt + h(wt)$ является $2\pi/w$-периодическим решением уравнения (3), если и только если триплет $\{w,\lambda,h\}\in\Omega\times\Lambda\times E$ является решением системы (П.13) для некоторого $r>0$. Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что система (П.13) имеет решение $\{w,\lambda,h\}$, в котором $w$ и $\lambda$ близки к $w_0$ и $\lambda_0$ для любого достаточно большого $r$. Преобразуем (П.13) к эквивалентному виду, удовлетворяющему условиям леммы 1.

Запишем второе равенство в (П.13) (снова $x(t) = r\sin t + h(t)$) в виде

$$\pi\Im m\,\frac{L(wi)}{M(wi)}r = \frac{1}{r}\int_0^{2\pi}(r\sin t + h(t))'f(x(t),\lambda)\,dt - \frac{1}{r}\int_0^{2\pi}h'(t)f(x(t),\lambda)\,dt.$$

Величина

$$\int_0^{2\pi}(r\sin t + h'(t))f(x(t),\lambda)\,dt = \int_0^{2\pi}x'(t)f(x(t),\lambda)\,dt$$

— тождественный нуль при каждом $\lambda$. Поэтому второе равенство в (П.13) приобретает вид

$$\pi\Im m\,\frac{L(wi)}{M(wi)}r = -\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}h'(t)f(x(t),\lambda)\,dt.$$

Из предположения 2 теоремы следуют при некотором целом $N\geqslant 0$ соотношения

$$\Re e\,(L(wi)M(-wi)) = (w-w_0)^{K+N}Q_1(w),\quad \Im m\,(L(wi)M(-wi)) = (w-w_0)^{K}Q_2(w),$$

где $Q_2(w_0)\neq 0$ и либо $Q_1(w_0)\neq 0$, либо $Q_1(w)\equiv 0$. Напомним, что $K$ — это нечетная кратность корня $w_0$ многочлена $\Im m\,(L(wi)M(-wi))$.

Теперь первые два уравнения системы (П.13) приобретают вид

$$\text{(П.14)}\qquad \pi(w-w_0)^{K+N}\frac{rQ_1(w)}{|M(wi)|^2} - \int_0^{2\pi}\sin t\,f(r\sin t + h(t),\lambda)\,dt = 0,$$

$$\text{(П.15)}\qquad \pi(w-w_0)^{K}\frac{rQ_2(w)}{|M(wi)|^2} + \frac{1}{r}\int_0^{2\pi}h'(t)f(x(t),\lambda)\,dt = 0.$$

Выразим величину $(w-w_0)^K$ из равенства (П.15) и подставим ее в (П.14). Полученное равенство имеет вид

$$(w-w_0)^N \frac{Q_1(w)}{Q_2(w)} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} h'(t) f(x(t),\lambda)\,dt - \int_0^{2\pi} \sin t\, f(r\sin t + h(t),\lambda)\,dt = 0. \tag{П.16}$$

Система, состоящая из трех уравнений (уравнения (П.16), а также второго и третьего уравнений системы (П.13)), эквивалентна системе (П.13).

Теперь все готово для применения топологической леммы. Пусть $\Omega = [w_1, w_2]$ — такая окрестность точки $w_0$, что на ней все использованные многочлены не имеют паразитных корней и, кроме того, величина $Q_2(w)$ не обращается в ноль вместе с $Q_2(w_0)$.

Пусть $\Lambda$ — такая окрестность точки $\lambda_0$, что функция $\varphi(\lambda)$ принимает на концах промежутка $\Lambda$ разные знаки.

Рассмотрим векторное поле, состоящее из трех компонент: компоненты

$$(w-w_0)^N \frac{Q_1(w)}{Q_2(w)} \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} h'(t) f(x(t),\lambda)\,dt - \int_0^{2\pi} \sin t\, f(r\sin t + h(t),\lambda)\,dt, \tag{П.17}$$

компоненты

$$\pi(w-w_0)^K \frac{Q_2(w)}{|M(wi)|^2} + \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} h'(t) f(x(t),\lambda)\,dt \tag{П.18}$$

и компоненты

$$h - A(w) Q f(r\sin t + h(t),\lambda).$$

Первое слагаемое компоненты (П.17) имеет порядок не выше $r^{-7/3}$ в силу (П.6), а второе слагаемое с точностью до малых членов равняется $r^{-2}\varphi(\lambda)$. Поэтому на концах промежутка $\Lambda$ знаки этой компоненты совпадают со знаками функции $\varphi(\lambda)$ при больших значениях $r$ и, следовательно, эти знаки различны.

Второе слагаемое второй компоненты (П.18) — бесконечно малое при $r \to \infty$, поэтому на концах промежутка $\Omega$ знаки этой компоненты совпадают со знаками функции $(w-w_0)^K$, а они разные в силу нечетности $K$.

В силу топологической леммы 1 теорема 1 доказана. ■

## Список литературы


1. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields / Applied Mathematical Sciences, V. 42. N.Y.: Springer, 1983.

2. *Kuznetsov Yu.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory / Applied Mathematical Sciences, V. 112. N.Y.: Springer, 1998.

3. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

4. *Юмагулов М.Г.* Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах // Докл. АН. 2009. Т. 424. №2. С. 177-180.

5. *Жежерун А.А., Кузнецов Н.А., Рачинский Д.И.* Бифуркация Хопфа в системах с оператором Прейсаха // Докл. АН. 2008. Т. 422. №3. С. 302-306.

6. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Циклы больших амплитуд в автономных системах с гистерезисом // Докл. АН. 1985. Т. 283. №1. С. 23-26.

7. *He. X.* Hopf bifurcation at infinity with discontinuous nonlinearities // J. Austr. Math. Soc. Ser. B. 1991. V. 33. P. 133-148.

8. *Fura A., Rybicki S.* Periodic solutions of second order Hamiltonian systems bifurcating from infinity // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Liniéaire. 2007. V. 24. № 3. P. 471-490

9. *Sabatini M.* Hopf bifurcation from infinity // Qual. Theory Dyn. Syst. 2002. V. 3. № 1. P. 1-17.

10. *Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I.* Hopf bifurcations from infinity, generated by bounded nonlinear terms // Functional Different. Equat. 1999. V. 6. №3-4. P. 357-374.

11. *Mees A.I.* Dynamics of feedback systems. Chichester. N.Y.: John Wiley & Sons, 1981.

12. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. Ижевск: РХД, 2009.

13. *Vidyasagar M.* Nonlinear system analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.

14. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

15. *Красносельский А.М., Красносельский М.А.* Векторные поля в произведении пространств и приложения к дифференциальным уравнениям // Дифференц. уравнения. 1997. N. 33. №1. С. 60-67.

16. *Красносельский А.М.* Неограниченные ветви вынужденных колебаний // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. №3. С. 344-364.

**Ссылки для перевода литературы на английский язык:**


3. *Marsden J., McCracken M.* Hopf Bifurcation and its Applications. New York, Springer, 1982.

4. *Yumagulov M.G.* An Operator Method for Studying Regular Bifurcations in Multiparameter Systems, Doklady Mathematics, **79**, №1, 2009, 41-44.

5. *Zhezherun A.A., Kuznetsov N.A., Rachinskii D.I.* Andronov-Hopf Bifurcation in Systems with Preisach Operator, Doklady Mathematics, **78**, №2, 2008, 705-709.

6. *Krasnosel'skii A.M., Krasnosel'skii M.A.* Large-amplitude cycles in autonomous systems with hysteresis, Soviet Math. Dokl., **32**, №1 1985, 14-17.

12. *Khalil H.K.* Nonlinear systems. Macmillan Publishing Company, 1992.

14. *Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P.* Geometrical methods of nonlinear analysis, Springer, Berlin, Heidelberg, 1984.

15. *Krasnosel'skii A.M., Krasnosel'skii M.A.* Vector fields in the direct product of spaces, and applications to differential equations, Differential Equations, **33**, №1, 1997, 59-66.

16. *Krasnosel'skii A.M.* Unbounded branches of periodic solutions, Differential equations, **45**, №3, 2009, 344-364.

А.М. Красносельский

# Вырожденный случай бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности

Р Е Ф Е Р А Т

Предложены новые условия возникновения бифуркации Андронова–Хопфа на бесконечности в квазилинейных системах управления. В главном случае линейная часть системы зависит от параметра, возникновение бифуркации определяются линейной частью. Если линейная часть не зависит от параметра, то бифуркации определяются старшими нелинейными слагаемыми. В этом случае наиболее просто формулы выглядят для нелинейностей (функциональных или гистерезисных) с насыщением, в этом случае возникновение бифуркации определяется зависящей от параметра разностью между уровнями насыщения на $+\infty$ и на $-\infty$. В настоящей работе рассматриваются системы с убывающей к нулю на бесконечности нелинейностью, то есть слагаемое с насыщением отсутствует. Исследование этого случая основано на точных асимптотиках на бесконечности проекций нелинейностей на двумерные подпространства главных гармоник.

*Контактные телефоны:*

Красносельский Александр Маркович

Домашний: **420-59-39**,

мобильный: **916-494-1576**,

служебный: **699-83-54**

E-mail: `Sashaamk@iitp.ru`