

О субгармониках больших амплитуд в полулинейном осцилляторе Дуффинга

© 2003 г. А.М. Красносельский, А.В. Покровский

Представлено академиком Н.А. Кузнецовым 20.03.2003 г.

Поступило . . 2003 г.

Рассмотрим уравнение

$$x'' + \underline{\alpha}^2 x = g(t, x, x'), \quad (1)$$

где g — непрерывная ограниченная $2\underline{\pi}$ -периодическая по переменной t функция. Предлагаются признаки существования последовательностей периодических решений с возрастающими к бесконечности амплитудами и периодами (кратными $2\underline{\pi}$). Существенным условием предлагаемых теорем является иррациональность числа $\underline{\alpha}$. В сообщении предлагаются теоремы двух видов: использующие симметрии (четность–нечетность) правой части и использующие условия, связывающие скорость $\underline{\beta}$ сходимости асимптотически однородной нелинейности к пределу на бесконечности, поведение коэффициентов Фурье вынуждающей силы $b(t)$ и качество рациональной аппроксимации $\underline{\alpha}$.

Если $\underline{\alpha}$ — целое число (резонансный случай), то существование $2\underline{\pi}$ -периодических решений $x(t)$ определяется свойствами нелинейности g . Первые результаты в этом направлении получены Ландесманом и Личем [1], далее они обобщались и дополнялись многими авторами (см., например, [2–4]) различными методами (топологическими, вариационными и др.). Основной является ситуация, когда $g(t, x, y) = b(t) + f(x)$ и выполнено условие (4): существуют различные пределы f_{\pm} функции $f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$. В этом случае определяющую роль играет величина

$$\bar{b} = \int_0^{2\underline{\pi}} e^{\underline{\alpha} t i} b(t) dt.$$

При $2|f_+ - f_-| \neq \bar{b}$ справедлива априорная оценка $2\underline{\pi}$ -периодических решений, при $2|f_+ - f_-| > \bar{b}$ существует по крайней мере одно такое решение.

Если α иррациональное число, то уравнение (1) всегда имеет по крайней мере одно 2π -периодическое решение и множество таких решений априори ограничено. Могут существовать и *субгармоники* — решения периода $2n\pi$ при натуральных $n > 1$. При каждом n множество субгармоник периода $2n\pi$ допускает априорную оценку, она зависит от α и от n . Однако множество всех периодических решений уравнения (1) (всех субгармоник) может быть неограниченным, условия возникновения этой ситуации предлагаются в настоящем сообщении. Минимальные периоды возникающих субгармоник стремятся к бесконечности, их амплитуды стремятся к бесконечности быстрее периодов — тем быстрее, чем лучше может быть приближено иррациональное число α подходящими цепными дробями. Используется классическая оценка

$$\left| \frac{\alpha}{n} - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}n^2}, \quad (2)$$

точнее теорема о том, что для любого иррационального числа α найдутся сколь угодно большие числа m и n такие, что выполнено неравенство (2) (см., например, [5]). Наилучшая постоянная $\sqrt{5}$ в работе не используется.

Существование субгармоник изучалось разными авторами в основном вариационными методами, основанными на теории Морса. Например, в [6] доказано существование субгармоник у векторного уравнения (1), существенным и принципиальным ограничением является градиентный вид нелинейности и выпуклость потенциала. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, но пределы f_{\pm} не существуют, то возможно существование последовательности 2π -периодических решений, имеющих возрастающие к бесконечности амплитуды.

Еще раз подчеркнем, что в силу иррациональности числа α (нет резонанса!) легко доказать (например, с помощью принципа Шаудера) существование 2π -периодического решения при каждом n . Но увидеть, что $2n\pi$ — это минимальный период полученного решения, существенно труднее. Более того, этот большой период будет минимальным “редко”, при существенных дополнительных условиях. Существование (при иррациональном α и ограниченной нелинейности) 2π -периодического решения, которое также является периодическим решением каждого кратного периода, лишь затемняет карти-

ну (по крайней мере при применении топологических методов). Дело в том, что суммарный индекс множества 2π -периодических решений равен 1, а суммарный индекс всех субгармоник фиксированного периода равен 0. Поэтому для того, чтобы увидеть существование субгармоник необходимо локализовать какую-то из них. Поиск их “во всем пространстве” смысла не имеет: индекс на бесконечности всегда определен и равен 1. Именно локализация субгармоник используется в доказательствах. В теоремах, использующих четность или нечетность, выбирается соответствующее подпространство четных или нечетных периодических функций. В теоремах с нелинейностями без симметрий удается локализовать субгармонику более точно.

Основные результаты

Ограничения на нелинейность. Рассмотрим уравнение (1) с ограниченной непрерывной нелинейностью $g(t, x, x')$. Основополагающую роль играет предположение о том, что нелинейность имеет специальный вид

$$g(t, x, y) = b(t) + f(x) + f_0(y) + f_1(t, x, y), \quad (3)$$

то есть содержит главную (контролируемую) часть $b(t) + f(x) + f_0(y)$ и меньшие (неконтролируемые) слагаемые f_1 . Определяющую роль в дальнейших построениях играет величина предела

$$\underline{\psi} = \liminf_{R \rightarrow \infty} |\Psi(R)|, \quad \Psi(R) = \int_0^{2\pi} \sin t f(R \sin t) dt.$$

Основное условие имеет вид $\underline{\psi} > 0$ или, что то же, $\underline{\psi} \neq 0$. Это условие всегда выполнено для функций f , имеющих на бесконечности различные пределы

$$f_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq f_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad (4)$$

в этом случае $\underline{\psi} = 2|f_+ - f_-|$. Это условие выполнено и для других функций (см. [4]), если к функции, удовлетворяющей (4), добавить четную функцию, периодическую или почти периодическую функцию с нулевым средним, функцию вида $\sin(x^{1/3})$ или $\sin(x^3)$ и пр., величина $\underline{\psi}$ от этого не изменится.

Далее обсуждаются разнообразные варианты распространения результатов на более широкие, чем (3), классы нелинейностей.

Основные результаты для уравнений с симметриями.

Теорема 1. Пусть число α иррационально. Пусть справедливы соотношения $f_1(-t, -x, y) = -f_1(t, x, y)$, $b(-t) = -b(t)$ и $f(-x) = -f(x)$. Пусть $\psi > 0$ и выполнено условие $\sup |f_1(t, x, y)| < \psi/4$. Тогда уравнение (1) с $f_0 \equiv 0$ имеет бесконечную последовательность нечетных периодических решений, их минимальные периоды и амплитуды стремятся к бесконечности.

В условиях теоремы 1 функция $t \mapsto g(t, x(t), x'(t))$ нечетная при любой нечетной дифференцируемой функции $x(t)$.

Теорема 2. Пусть число α иррационально. Пусть верны равенства $f_1(-t, x, -y) = f_1(t, x, y)$ и $b(-t) = b(t)$. Пусть $\psi > 0$ и выполнено условие $\sup |f_1(t, x, y)| < \psi/4$. Тогда уравнение (1) при произвольной четной функции f_0 имеет бесконечную последовательность четных периодических решений, их минимальные периоды и амплитуды стремятся к бесконечности.

Подчеркнем, что в теореме 2 симметрия функции $f(x)$ не предполагается. Условие $\psi > 0$ означает, что нечетная часть $[f(x) - f(-x)]/2$ функции $f(x)$ существенно отлична от нуля. В условиях теоремы 2 функция $t \mapsto g(t, x(t), x'(t))$ четная при любой четной дифференцируемой $x(t)$.

Теоремы 1 и 2 могут быть применены к функциям $b(t)$, если свойствами четности или нечетности обладает сдвиг $b(t + \phi)$ при $\phi \neq 0$. Для уравнения $x'' + \alpha^2 x = \sin t + f(x)$ с нечетной f применимы обе теоремы (теорема 2 после сдвига времени). Периодическое решение минимального периода $2n\pi$ вложено в семейство \mathfrak{N} из n сдвигов $x(t + 2k\pi)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. В рассматриваемом случае в семействе \mathfrak{N} могут быть и четные, и нечетные решения.

В условиях теорем 1 и 2 амплитуды A_n больших субгармоник периода $2n\pi$ удовлетворяют условиям $A_n \geq c n^2$ ($c > 0$).

Уравнения без симметрий. В этом разделе формулируется теорема о существовании субгармоник, не обладающих свойствами четности или нечетности. Эти теорема применима для случая, когда входной сигнал $b(t)$ имеет бесконечно много гармоник сколь угодно больших частот. Ее аналоги для $b(t)$,

включающих конечное число гармоник (например, для $b(t) = \sin t$) авторам неизвестны. Рассмотрим уравнение с асимптотически однородной зависящей только от переменной x нелинейностью

$$x'' + \underline{\alpha}^2 x = b(t) + f(x). \quad (5)$$

Пусть функция b имеет кусочно непрерывную производную и

$$b(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt + \underline{\varphi}_k), \quad a_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

В этом разделе через $m = m(n)$ и n обозначаются числители и знаменатели подходящих дробей иррационального числа $\underline{\alpha}$. Последовательность чисел n и $m = m(n)$ такова, что $\underline{\varepsilon}_n = \underline{\alpha}^2 - m^2/n^2 \rightarrow 0$ достаточно быстро. Предположим, что в этой последовательности существует бесконечное множество \mathfrak{N} нечетных знаменателей n . Это предположение представляется проверяемым для любого конкретного иррационального числа. Вразумительно описать множество всех таких иррациональных чисел авторы не смогли. Ниже в пределах при $n \rightarrow \infty$ предполагается, что $n \in \mathfrak{N}$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (4), причем при некотором $\underline{\beta} > 1$*

$$\limsup_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^{\underline{\beta}-1} |f(x) - f_{\pm}| < \infty. \quad (7)$$

Пусть число $\underline{\alpha}$ трансцендентно и либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\varepsilon}_n n^{\underline{\beta}} = \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m}{n^3 |\underline{\varepsilon}_n|} = \infty, \quad (8)$$

либо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \underline{\varepsilon}_n n^{\underline{\beta}} < \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m}{n^2 |\underline{\varepsilon}_n|^{1-\underline{\beta}-1}} = \infty. \quad (9)$$

Тогда найдутся сколь угодно большие значения $n \in \mathfrak{N}$, при которых уравнение (5) имеет по крайней мере одно $2\pi n$ -периодическое решение, его амплитуда стремится к бесконечности как $|\underline{\varepsilon}_n|^{-1}$. Существует по крайней мере два решения периода $2\pi n$, не совпадающих при сдвигах на целое кратное 2π .

Из соотношений (8) и (9) и ограничений на скорость убывания к нулю коэффициентов ряда Фурье кусочно непрерывно дифференцируемые функций вытекает ограничение $\varepsilon_n n^5 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, возможное только для трансцендентных чисел $\underline{\alpha}$. Алгебраические числа так хорошо не приближаются (теорема Рота, [7]); множество таких трансцендентных $\underline{\alpha}$ имеет меру нуль.

Можно не предполагать, что все числа a_k ненулевые. Достаточно, чтобы при $n \in \mathfrak{N}$ среди чисел $a_{m(n)}$ было бесконечно много ненулевых. Пределы в (8) и (9) брать по соответствующему более узкому множеству значений n .

Из теоремы 3 следует множество “менее точных” утверждений. Приведем один пример. Пусть $b(t)$ такова, что при некотором $p > 0$ верно неравенство $\liminf n^p a_n > 0$. Пусть $0 < \underline{\alpha}_- < \underline{\alpha}_+ < \infty$ и $\underline{\delta} > 1$. Тогда найдется плотное множество $A \in [\underline{\alpha}_-, \underline{\alpha}_+]$ трансцендентных чисел $\underline{\alpha}$ такое, что при $\underline{\alpha} \in A$ и любой функции f , удовлетворяющей условию (7) с $\underline{\beta} > \underline{\delta}$, уравнение (5) имеет последовательность $2\underline{\pi}n$ -периодических решений, амплитуды которых растут к бесконечности.

Вообще говоря, ситуация в условиях теорем 1 и 2 следующая. Суммарный топологический индекс множества субгармоник (при фиксированном n) равен нулю. И только возможность рассмотреть соответствующий оператор в более узком пространстве четных или нечетных функций позволяет найти решение ненулевого индекса. Так, если возмутить уравнение $z\bar{z} = 1$ на комплексной плоскости малым слагаемым $\varepsilon i z\bar{z}$, то все решения (а их — целая окружность!) пропадут при любом сколь угодно малым ε . Решения вещественного уравнения $x^2 = 1$ малыми добавками разрушить нельзя.

Вот точно также нельзя разрушить и те решения, существование которых установлено в теореме 3. Там $2n\underline{\pi}$ -периодические решения ищутся в “большом пространстве”, и в нем отдельно выделяются n множеств, в каждом из которых есть по крайней мере одно решение, причем вращение поля на границе множества равно 1 и отдельно выделяются n множеств, в каждом из которых есть по крайней мере одно решение, причем вращение поля на границе множества равно -1 . Суммарный индекс остается равен 0.

Видимо, в условиях теорем 1 и 2 решения могут быть не изолированными в пространстве L^2 , оставаясь изолированными в подпространствах четных или нечетных функций.

Уравнение в частных производных

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + u_{tt} + \underline{\alpha}^2 u = b(t) + f(u) \quad (10)$$

с $2\underline{\pi}$ -периодической функцией $b(t)$ и краевыми условиями Дирихле

$$u(t, 0) = u(t, \underline{\pi}) = 0 \quad (11)$$

по переменной x . Для такого уравнения справедливы аналоги теорем 1 и 2. Сформулируем одно из возможных утверждений, аналогичное теореме 2. Рассмотрим функцию $\Psi(R)$ и постоим по ней величину $\underline{\psi}$. Пусть $\underline{\psi} > 0$.

Теорема 4. *Пусть $\underline{\alpha} \in (1, 2)$ и число $\sqrt{\underline{\alpha}^2 - 1}$ иррационально. Пусть функция $b(t)$ четная. Тогда уравнение (10) имеет бесконечную последовательность четных и периодических по t решений, удовлетворяющих (11) и имеющих периоды и амплитуды, стремящиеся к бесконечности.*

Это утверждение может быть усилено в разнообразных направлениях. Например, можно рассматривать правую часть более общего вида.

Если $\underline{\alpha} \in (2, 3)$, то утверждение теоремы 4 справедливо, если числа $\sqrt{\underline{\alpha}^2 - 1}$ и $\sqrt{\underline{\alpha}^2 - 4}$ иррациональны, причем существует бесконечная последовательность таких знаменателей n , что одно из этих чисел приближается рациональным с этим знаменателем хорошо (как n^{-2}), а другое плохо (как n^{-1}), это ситуация общего положения. Рациональных $\underline{\alpha}$, не удовлетворяющих этому условию, авторам найти не удалось, иррациональных таких чисел много (много даже таких, что $\underline{\alpha}^2$ — рациональное число).

Аналогично можно рассмотреть и значения $\underline{\alpha} > 3$.

Возможные обобщения

1. Неавтономные контролируемые нелинейности. Можно дополнительно включить в контролируемую часть нелинейности еще самых разнообразных видов. Приведем возможные примеры.

Не меняя формулировок, в теореме 1 можно добавить в нелинейность слагаемые вида $a(t)f_2(x')$ с любыми f_2 и нечетными функциями $a(t)$ (или слагаемые $a(t)f_2(x)$ с симметричными функциями $a(t)$ и $f_2(x)$ разной четности), имеющими лишь конечное количество гармоник в разложении в ряд Фурье. При учете таких слагаемых используется тот факт, что при фиксированном $k \neq 0$ и достаточно больших взаимно простых m и n справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin(nkt + \phi) f_2(R \sin mt) dt = 0.$$

Аналогично, можно добавить и слагаемые вида $a(t)f_2(x)$ или $a(t)f_2(x')$ в теорему 2. Надо лишь, чтобы при четных $x(t)$ соответствующее слагаемое было четным. Такое возможно, например, при симметричных функциях $a(t)$ и $f_2(x')$ одинаковой четности, или при четной $a(t)$ и любой $f_2(x)$.

Возможны обобщения всех сформулированных теорем на уравнения с неограниченными сублинейными нелинейностями. При этом используются построения, родственные теоремам из [8] о равномерной сходимости к нулю проекций приращений неограниченных нелинейностей.

2. Уравнения старшего порядка и системы. Легко сформулировать аналоги теорем 1 и 2 для случая уравнений старшего порядка вида

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = g(t, x, x')$$

с четным многочленом $L(p)$ или уравнений более общего вида

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)g(t, x, x')$$

(здесь M — также четный многочлен меньшей степени).

Было бы интересно получить аналоги теорем 1 и 2 для случая векторных систем $z'' + Az = b(t) + f(z, z')$, с четным или нечетным 2π -периодической вынуждающей силой $b(t)$ и векторной нелинейностью, обладающей соответствующей симметрией, и матрицей A , имеющей простое иррациональное положительное собственное значение.

В качестве примера рассмотрим непотенциальную систему

$$x_1'' + \underline{\alpha}_1^2 x = g_1(t, x_1, x_2), \quad x_2'' + \underline{\alpha}_2^2 x = g_2(t, x_1, x_2) \quad (12)$$

с 2π -периодическими по переменной t непрерывными ограниченными функциями $g_1(t, x_1, x_2)$ и $g_2(t, x_1, x_2)$. Если $\underline{\alpha}_1 \neq \underline{\alpha}_2$ — два иррациональных числа, то в такой системе тоже можно исследовать существование больших субгармоник. Пусть нелинейности обладают симметрией (например, обе функции $g_j(t, x_1(t), x_2(t))$ четные при любых четных $x_j(t)$).

Существование субгармоник периода $2n\pi$ с одной компонентой, имеющей амплитуду порядка не менее n^2 , и другой с амплитудой порядка n доказывается совершенно аналогично теоремам 1 и 2. Необходимо приблизить одно из чисел $\underline{\alpha}_j$ подходящей дробью m/n так, чтобы другое число приближалось рациональными числами с этим знаменателем плохо ($\sim 1/n$).

В системе (12) можно “поймать” существование субгармоник периода $2n\pi$, имеющих обе компоненты с амплитудами порядка не менее $n^{3/2}$. Для этого следует одновременно хорошо аппроксимировать оба числа $\underline{\alpha}_j$ рациональными с общим знаменателем. Это возможно, существует бесконечная последовательность знаменателей n таких, что

$$\left| \underline{\alpha}_1 - \frac{m_1}{n} \right|, \left| \underline{\alpha}_2 - \frac{m_2}{n} \right| \leq c n^{-3/2}.$$

Приведем пример одного соответствующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть оба числа $\underline{\alpha}_j$ иррациональны и рационально независимы. Пусть правые части в (12) имеют вид $g_j(t, x_1, x_2) = b_j(t) + f_{j1}(x_1) + f_{j2}(x_2)$, $j = 1, 2$, где обе 2π -периодические функции $b_j(t)$ — четные и непрерывные. Пусть существуют пределы*

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f_{ij}(\xi) = f_{ij}^\pm,$$

причем $f_{11}^+ \neq f_{11}^-$ и $f_{22}^+ \neq f_{22}^-$. Тогда уравнение (12) имеет бесконечную последовательность четных $2\pi n$ -периодических решений, имеющих амплитуды $A_{j,n}$ компонент x_j , стремящиеся к бесконечности, причем $A_{j,n} \geq c n^{3/2}$.

Естественно, в теореме 5 можно выбрать нелинейности существенно более общего вида. Можно также устанавливать существование нечетных субгармоник и субгармоник, одна из компонент которых четная, а другая нечетная.

3. О “количество” субгармоник. Множество значений n , при которых существуют большие субгармоники периода $2n\pi$, не ограничиваются знаменателями подходящих цепных дробей. Выберем $\underline{\gamma} \in (0, 1)$, $C > 0$. При достаточно больших n , при которых $|\underline{\varepsilon}_n| \leq C n^{-1-\underline{\gamma}}$, существуют субгармоники периода $2n\pi$. Оценка $|\underline{\varepsilon}_n| \leq C n^{-1-\underline{\gamma}}$ выполнена на более плотном множестве значений n , чем множество знаменателей подходящих дробей.

Авторы не знают описания частотных характеристик множества тех n , при которых существуют субгармоники.

Было бы интересно получить строгий результат о существовании конкретной субгармоники для конкретного уравнения.

4. Уравнения старшего порядка с кратными корнями. Рассмотрим при некотором натуральном $\ell > 1$ уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \underline{\alpha}^2 \right)^\ell x = b(t) + f(x). \quad (13)$$

Для этого уравнения возможны аналоги теоремы 3, не предполагающие трансцендентности числа $\underline{\alpha}$.

Ограничимся простым примером ($\underline{\alpha} = \sqrt{2}$). Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2 \right)^5 x = b(t) + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}. \quad (14)$$

Пусть для коэффициентов a_n ряда (6), построенного по 2π -периодической вынуждающей силе $b(t)$, справедлива оценка $a_n \geq c n^{-3}$. Тогда у уравнения (14) есть последовательность субгармоник с возрастающими к бесконечности периодами и амплитудами.

Все четные подходящие дроби $\frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \dots$ числа $\underline{\alpha} = \sqrt{2} = [1; 2, 2, \dots]$ имеют нечетные знаменатели.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность Михаилу Цфасману за многочисленные консультации по теории чисел. Работа начата во время визита А.М. Красносельского в University College, Корк, Ирландия в 2002г. и поддержана грантом РФФИ 01-01-00146.

Список литературы

1. *Lazer A.C., Leach D.E.* // Ann. Mat. Pura Appl. 1969. V. 82. P. 46-68.
2. *Fučik S.* Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems, Prague, 1980
3. *Mawhin J., Willem M.* Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. Springer, New York, 1989.
4. *Krasnosel'skii A.M., Mawhin J.* // Math. Comp. Modelling. 2000. V. 32. P. 1445-1455.
5. *Касселс Дж.В.С.* Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд. иностр. лит., 1961.
6. *Fonda A., Ramos M., Willem M.* // Topol. Meth. Nonlin. Anal. 1993. V. 1. P. 49-66.
7. *Roth K. F.* Mathematika. 1955. V. 2. P. 1-20.
8. *Krasnosel'skii A.M., Kuznetsov N.A., Rachinskii D.I.* // J. Anal. Appl. 2002. V. 21. №3. P. 639-668.
9. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

Ссылки на английские переводы:

6. *Cassels J.W.S.* An introduction to diophantine approximation. Cambridge Univ. Press, 1957.
10. *Krasnosel'skiĭ M.A., Zabreiko P.P.* Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, Springer, 1984.

А.М. Красносельский, А.В. Покровский

**О субгармониках больших амплитуд в полулинейном осцилляторе
Дуффинга**

РЕФЕРАТ

В сообщении предлагаются условия существования бесконечного количества субгармоник у уравнения Дуффинга вида $x'' + \underline{\alpha}^2 x = g(t, x, x')$ с при иррациональным $\underline{\alpha}$ и равномерно ограниченной непрерывной функцией $g(t, x, x')$, периодической по t с периодом 2π . Субгармоники имеют возрастающие к бесконечности периоды и амплитуды, величина амплитуд зависит от того, насколько хорошо число $\underline{\alpha}$ может быть приближено рациональными. Рассматриваются два случая, в одном используются симметрии (четность-нечетность) правой части сравнительно общего вида, в другом, более громоздком, используются соотношения между коэффициентами ряда Фурье вынуждающей силы, асимптотикой нелинейности на бесконечности и тем как транцендентное число $\underline{\alpha}$ может быть приближено рациональными.

A.M. Krasnosel'skii, A.V. Pokrovskii

**On large-amplitude subharmonics in semilinear Duffing
oscillator**

Институт проблем передачи информации РАН, Москва

Institute for Information Transmission Problems, Moscow, Russia

Контактный телефон:

Красносельский Александр Маркович

Домашний: **936-32-30**, служебный: **299-83-54**

E-mail: amk@iitp.ru

Главному редактору журнала
“Доклады Академии наук”
академику В.А. Кабанову

Глубокоуважаемый Виктор Александрович!

Прошу Вас опубликовать в журнале “Доклады Академии наук” в разделе “Математика” статью А.М. Красносельского, А.В. Покровского “О субгармониках больших амплитуд в полулинейном осцилляторе Дуффинга”.

Статья не содержит запрещенных к публикации сведений, в экспертизе не нуждается и может быть опубликована в открытой печати.

Директор ИППИ РАН

академик

Н.А. Кузнецов