

©2006г. А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук  
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва),

А.В. ПОКРОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук  
(Национальный университет Ирландии, Корк)

## Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением <sup>1</sup>

Доказывается диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением при достаточно широкой петле гистерезиса, указана простая явная оценка. Доказано отсутствие субгармоник больших амплитуд при сколь угодно узкой петле.

### 1. Постановка задачи

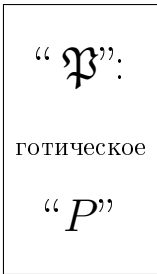
Многие эффекты в механике, теории пластичности, магнетизме, макроэкономике и др. качественно моделируются гистерезисными нелинейностями, важнейшую роль во многих случаях (например, в теории ферромагнетизма) играет модель Преисаха  $\mathfrak{F}x(t)$  (см. [1], краткое описание приведено в разделе 2). Теоремы идентификации [2] объясняют выбор именно этой модели для описания различных физических явлений. Соответственно, поведение различных осцилляторов в магнитном поле описывается уравнением

$$(1) \quad x'' + \gamma^2 x = b(t) + \mathfrak{F}x(t)$$

с  $2\pi$ -периодической ограниченной возмущающей силой  $b \in L^2(0, 2\pi)$  и нелинейностью Преисаха  $\mathfrak{F}$ . Число  $\gamma$  далее предполагается иррациональным, это предположение исключает возможные резонансы осциллятора с периодом вынуждающей силы.

Задача Коши для такого уравнения хорошо определена, для каждого начального состояния  $\eta_0(\alpha, \beta)$  нелинейности  $\mathfrak{F}x(t)$  и каждого начального значения  $(x_0, x_1) = (x(0), x'(0))$  уравнения при всех  $t \geq 0$  определено единственное решение  $x(t)$  уравнения (1).

<sup>1</sup>Работа частично написана во время визитов А.М. Красносельского в University College, Cork и поддержана грантами РФФИ 03-01-00258, 04-01-00330, грантом Президента РФ НШ-1532.2003.1.



В работе исследуется вопрос о диссипативности уравнения (1): верно ли, что все его решения  $x$  втекают через некое время (зависящее от начальных условий) в круг  $\{x^2 + (x')^2 \leq R_*^2\}$  фиксированного радиуса  $R_*$ .

Диссипативность уравнения (1) (и близких к нему) обуславливается наличием слагаемого, поглощающего энергию вынуждающей силы  $b(t)$ .

Уравнение с магнитным трением (нелинейностью Преисаха) отличается от уравнений с иными видами слагаемых, поглощающих энергию. Пусть

$$(2) \quad x'' + \gamma^2 x = b(t) + Fx(t);$$

слагаемое  $Fx$  описывает какой-либо эффект поглощения энергии. Вообще говоря,  $Fx$  — это сила, вызываемая эффектом и противодействующая движению. Энергия, поглощаемая на промежутке времени  $[0, T]$  у решения  $x$  слагаемым  $Fx$ , может быть посчитана по формуле

$$E = \int_0^T x'(t) Fx(t) dt.$$

Различные слагаемые  $Fx$  вносят существенно различный вклад в общий баланс энергии. Проиллюстрируем это на  $T$ -периодических функциях  $x(t) = A \sin 2\pi T^{-1}t$  (решения уравнения (2) близки к таким функциям).

При обычном “линейном” трении  $Fx = kx'$  поглощенная энергия  $E$  пропорциональна  $A^2$ . Хорошо известно, что такое мощное поглощение энергии подавляет раскачку вынуждающей силой и приводит к диссипативности.

При кулоновском трении  $Fx = k \operatorname{sign}(x')$  (или аналогичном типа  $Fx = k \arctg(x')$ ) поглощенная энергия  $E$  пропорциональна  $|A|$  и этого также достаточно для диссипативности уравнения.

Пусть теперь трение зависит от скорости не функционально, а каким-либо гистерезисным образом. Именно такая ситуация возникает во многих реальных физических экспериментах. Если  $Fx$  — это “пластическое трение”, описываемое моделью Прандтля–Ишлинского, то энергия  $E$  равна площади возникающей петли гистерезиса, эта петля имеет постоянную высоту и ширину, пропорциональную амплитуде  $|A|$ .

При исследовании уравнений со всеми рассмотренными видами трения поглощаемая энергия при больших начальных значениях очень велика, диссипативность определяется неограниченными слагаемыми в соответствующих выражениях. Если трение имеет ферромагнитную (или какую-нибудь близкую) природу и описывается нелинейностью Прейсаха, то даже при неограниченном возрастании величины  $|A|$  поглощаемая энергия остается ограниченной и равна площади максимальной петли гистерезиса модели Прейсаха. Это принципиальное отличие от других видов трения — ограниченность поглощенной энергии за одно колебание сколь угодно большой амплитуды — в задаче о диссипативности делает изучение уравнений с моделью Прейсаха особенно трудным и интересным. При подсчете роли слагаемых, меняющих энергию, приходится учитывать ограниченные нелинейные слагаемые; учет и сравнение таких слагаемых не нужны при исследовании диссипативности уравнений со слагаемыми с “неограниченно большой” поглощаемой энергией.

Заметим еще, что близким вопросам (для другого уравнения) посвящена работа П. Крейчи [3].

## 2. Нелинейность Прейсаха

Для удобства читателя приведем определение нелинейности Прейсаха и перечислим некоторые ее свойства, в основном следуя [1].

“ $\mathcal{R}$ ”:

рукописное

латинское

“ $R$ ”

### 2.1. Неидеальные реле

Будем обозначать через

$$(3) \quad \eta(t) = \mathcal{R}_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0]x(t), \quad t \geq t_0$$

переменное состояние неидеального реле (см. рис. 1) с пороговыми числами  $\alpha, \beta$  ( $\alpha > \beta$ ) при входе  $x(t)$  ( $t \geq t_0$ ) и начальном состоянии реле  $\eta_0$ . Здесь вход — произвольная непрерывная скалярная функция; начальное состояние  $\eta_0$  — одно из чисел 1 или  $-1$ . Значения  $\eta(t)$  ( $t \geq t_0$ ) оператора (3) определены при  $\eta_0 = 1$ , если  $x(t_0) > \beta$ , и при  $\eta_0 = -1$ , если  $x(t_0) < \alpha$ . Функция  $\eta(t)$  принимает

Рис. 1

значения  $\pm 1$ , при каждом  $t = \tau$  функция  $\eta(t)$  (это состояние неидеального реле в момент  $\tau$ ) определяется формулой

$$(4) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0]x(\tau) = \begin{cases} \eta_0, & \text{если } \beta < x(t) < \alpha \text{ при всех } t \in [t_0, \tau]; \\ 1, & \text{если найдется такое } t_1 \in [t_0, \tau], \text{ что} \\ & x(t_1) \geq \alpha \text{ и } x(t) > \beta \text{ при всех } t \in [t_1, \tau]; \\ -1, & \text{если найдется такое } t_1 \in [t_0, \tau], \text{ что} \\ & x(t_1) \leq \beta \text{ и } x(t) < \alpha \text{ при всех } t \in [t_1, \tau]. \end{cases}$$

При каждом  $\tau \geq t_0$  из  $x(\tau) \geq \alpha$  вытекает равенство  $\eta(\tau) = 1$ , а из  $x(\tau) \leq \beta$  — равенство  $\eta(\tau) = -1$ . Скалярная функция  $\eta(t)$  удовлетворяет соотношениям  $\eta(t_0) = \eta_0$  и  $|\eta(t)| = 1$  при всех  $t$  и имеет не более конечного числа разрывов на каждом отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

## 2.2. Системы реле

Рассматривается набор  $\mathcal{B}$  неидеальных реле, параметризованных парами  $(\alpha, \beta)$  из полуплоскости  $\Pi = \{(\alpha, \beta) : \alpha > \beta\}$ . Состояния набора  $\mathcal{B}$  — это измеримые функции  $\eta(\cdot, \cdot) : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие при некотором  $x_0 \in \mathbb{R}$  равенствам

$$(5) \quad \eta(\alpha, \beta) = -1, \beta \geq x_0; \quad \eta(\alpha, \beta) = 1, \alpha \leq x_0; \quad |\eta(\alpha, \beta)| = 1, \beta < x_0 < \alpha;$$

если верны эти равенства, то будем писать  $\eta(\alpha, \beta) \in \Omega(x_0)$ . Входами набора  $\mathcal{B}$  служат произвольные непрерывные скалярные функции  $x(t)$  ( $t \geq t_0$ ).

Если  $\eta_0(\alpha, \beta) \in \Omega(x(t_0))$ , то говорят, что вход  $x(t)$  ( $t \geq t_0$ ) *допустим* при начальном состоянии  $\eta_0(\alpha, \beta)$  или что начальное состояние *допустимо* при входе  $x(t)$ . При каждом непрерывном входе  $x(t)$  ( $t \geq t_0$ ) и каждом допустимом при входе  $x(t)$  начальном состоянии  $\eta_0(\alpha, \beta)$  определена функция

$$(6) \quad \eta(t, \alpha, \beta) = \mathcal{R}_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0(\alpha, \beta)]x(t), \quad t \geq t_0, \quad \alpha > \beta,$$

называемая переменным состоянием набора реле  $\mathcal{B}$ . Равенство (6) — это правило определения переменных состояний индивидуальных реле из  $\mathcal{B}$  при общем

“ $\mathcal{B}$ ”:  
рукописное  
латинское  
“ $\mathcal{B}$ ”

входе  $x(t)$ . Функция (6) измерима при каждом  $t$  в полуплоскости  $\Pi$ , при всех  $t$  справедливо включение  $\eta(t, \alpha, \beta) \in \Omega(x(t))$ .

Пусть  $\mu(\alpha, \beta) > 0$  — заданная на  $\Pi$  интегрируемая функция с компактным носителем,

$$(7) \quad H \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\alpha > \beta} |\mu(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta < \infty.$$

Выход набора  $\mathcal{B}$  при входе  $x(t)$  и допустимом начальном состоянии  $\eta_0(\alpha, \beta)$  определяется равенством

$$(8) \quad \mathfrak{P}x(t) = \iint_{\alpha > \beta} \mu(\alpha, \beta) \mathcal{R}_{\alpha\beta}[t_0, \eta_0(\alpha, \beta)]x(t) d\alpha d\beta, \quad t \geq t_0.$$

Гистерезисную нелинейность, переменные состояния и выходы которой определяются формулами (6) и (8), называют *моделью Прейсаха* или *нелинейностью Прейсаха*.

### 2.3. Свойства нелинейности Прейсаха

Отметим кратко некоторые необходимые свойства модели Прейсаха.

1. Выход нелинейности Прейсаха всегда непрерывен (хотя функция (6) разрывна); его значения ограничены по модулю константой (7).

2. Направление обхода петель гистерезиса одно и то же для всех входов и всех начальных состояний. Это свойство означает, что энергия может только поглощаться, но не выделяться.

3. Пусть  $S$  — площадь максимальной петли,  $H > 0$  — высота петли, при  $|x| > R_0$  значение нелинейности равно  $H \operatorname{sign} x$  (см. рис 2).

Рис. 2

*Утверждение 1. Пусть  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  — непрерывный вход на нелинейность Прейсаха. Пусть либо  $x(t_0) = x(t_1) > R_0$ , либо  $x(t_0) = x(t_1) < -R_0$ . Пусть прообраз промежутка  $[-R_0, R_0]$  при преобразовании  $x(t)$  состоит из двух невырожденных промежутков, пусть на каждом из них функция  $x(t)$  монотонная. Пусть петля гистерезиса<sup>2</sup> проходится ровно один раз: один раз*

<sup>2</sup>Она располагается именно над промежутком  $[-R_0, R_0]$  в плоскости  $(x, \mathfrak{P}x)$ .

при возрастании  $x(t)$  и один раз при убывании. Тогда справедливо равенство

$$(9) \quad \int_{t_0}^{t_1} x'(t) \mathfrak{P}x(t) dt = -S.$$

### 3. Основные результаты

#### 3.1. Диссипативность

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение  $y'' + \gamma^2 y = b(t)$ . Все решения такого уравнения ограничены и почти периодические, они имеют вид  $k_c \cos \gamma t + k_s \sin \gamma t + y_*(t)$ , где  $y_*$  — единственное периодическое решение (периода  $2\pi$ ). Если функция  $b$  имеет ряд Фурье

$$b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(kt + \varphi_k), \quad a_k \geq 0,$$

то ряд Фурье функции  $y_*$  имеет вид

$$y_*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\gamma^2 - k^2} \sin(kt + \varphi_k).$$

Если функция  $b$  непрерывна, то  $y_* \in C^2$ . Рассмотрим число

$$r = \inf_{t \in [0, 2\pi]} M(t), \quad M(t) = \sqrt{\gamma^2 [y_*(t)]^2 + [y'_*(t)]^2}.$$

Функция  $M$  периодическая, ее период равен  $2\pi$ . Легко придумать пример, когда  $r = 0$ , в ситуации общего положения  $r > 0$ .

*Теорема 1. Если  $S > 4rH$ , то уравнение (1) диссипативно: каждая траектория уравнения (1) входит в некоторый круг на плоскости  $(x, x')$  и там остается.*

Здесь и далее в доказательстве, говоря о кругах, мы всегда предполагаем, что их центр совпадает с началом координат.

### 3.2. Отсутствие субгармоник больших амплитуд

В [4] приведены теоремы о существовании субгармоник (периодических решений кратного периода  $2n\pi$ ) больших амплитуд для уравнения

$$(10) \quad x'' + \gamma^2 x = b(t) + f(x)$$

с непрерывной нелинейностью  $f$ , удовлетворяющей условиям насыщения:

$$(11) \quad f_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq f_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Эти субгармоники имели вид

$$(12) \quad R \sin\left(\frac{m}{n}t + \theta\right) + h(t),$$

где  $m/n$  — это подходящие дроби иррационального числа  $\gamma$ . Амплитуда основной гармоники  $R$  при больших знаменателях  $n$  имеет порядок  $n(n\gamma - m)^{-1} \geq n^2$ , слагаемое  $h(t)$  допускает априорную оценку норм в  $C$ , не зависящую от  $n$ .

Наличие периодических решений сколь угодно большой амплитуды отрицает диссипативность. График нелинейности с насыщением очень похож на “график” нелинейности Прейсаха, однако присутствие гистерезисной петли меняет ситуацию с существованием субгармоник: у уравнения с нелинейностью Прейсаха не может быть субгармоник больших амплитуд указанного вида при сколь угодно узкой (но ненулевой!) ширине петли гистерезиса.

“ $\mathfrak{N}$ ”:  
готическое  
“ $N$ ”

Обозначим через  $\mathfrak{N}_{\varepsilon, K}$  ( $K, \varepsilon > 0$ ) множество натуральных чисел  $n$ , при которых число  $\gamma$  “хорошо” приближаемо рациональным со знаменателем  $n$ :

$$(13) \quad |\sigma_n| \leq Kn^{-(1+\varepsilon)}, \quad \sigma_n = \gamma^2 - \frac{m^2}{n^2},$$

где  $m$  и  $n$  взаимно просты. Например,  $\mathfrak{N}_{1,1}$  — это множество знаменателей подходящих дробей числа  $\gamma$ . При уменьшении  $\varepsilon$  и увеличении  $K$  множество  $\mathfrak{N}$  расширяется. Вопрос о полном описании множеств  $\mathfrak{N}$  при произвольных  $K$  и  $\varepsilon$  авторам кажется очень сложным. Заметим лишь, что множество натуральных  $n \notin \mathfrak{N}_{\varepsilon, K}$  бесконечно при любых  $K, \varepsilon$ .

*Теорема 2. Не существует неограниченной последовательности субгармоник периода  $2n\pi$  уравнения (1) амплитуды  $A_n$ , где  $n \in \mathfrak{N}_{\varepsilon, K}$ ,  $A_n n^{-1} \rightarrow \infty$ .*

Утверждение теоремы 2 существенно слабее утверждения теоремы 1: из диссипативности вытекает ограниченность множества всех периодических траекторий. Кроме того, теорема 2 утверждает лишь отсутствие “круглых” субгармоник: в условиях теоремы субгармоники имеют вид (12), если  $n \in \mathfrak{N}_{\varepsilon, K}$  достаточно велико, то величина  $R \sim A_n$  имеет порядок по крайней мере  $|\sigma_n^{-1}| \geq n^{1+\varepsilon}$ , при этом  $\|h\|_C$  имеет меньший порядок. Однако основное содержательное условие  $\gamma S > 2\pi r H$  теоремы 1 в теореме 2 не используется — сколь угодно узкая петля гистерезиса “убивает” субгармоники.

## 4. Заключение

Работа посвящена свойству диссипативности обыкновенных дифференциальных уравнений: это свойство выполнено, когда все решения за конечное время входят в некоторый шар в фазовом пространстве и остаются там навсегда. Предложен метод доказательства диссипативности всех решений обыкновенных дифференциальных уравнений с гистерезисом Прейсаха. Доказывается диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением при достаточно широкой петле гистерезиса, указана простая явная оценка. Доказано отсутствие субгармоник больших амплитуд при сколь угодно узкой петле.

### П Р И Л О Ж Е Н И Е

1. *Схема доказательства.* Зададимся начальными условиями

$$(П.1) \quad x(t_0) = R \cos \theta, \quad x'(t_0) = \gamma R \sin \theta, \quad \mathfrak{P}x(t_0) = \eta_0 \in \Omega(x(t_0)).$$

Покажем, что при большом  $T$  (зависящем от  $R$  и не зависящем от  $\theta$  и  $\eta_0$ ) внутри промежутка  $[t_0, t_0 + T]$  решение  $x$  войдет в фиксированный круг (радиус которого не зависит ни от  $R$ , ни от  $\theta$ ) — круг вхождения. Покажем, что из круга вхождения за фиксированное время решение вернется в этот же круг (возможно, выходя из круга в промежуточные моменты времени). Отсюда следует утверждение теоремы: за фиксированное время невозможно

уйти далеко от круга вхождения, в качестве круга, о котором идет речь в формулировке теоремы, следует выбрать больший круг — тот, из которого нельзя выйти за указанное фиксированное время, стартуя из круга вхождения.

Каждый раз без ограничения общности будем предполагать, что очередной начальный момент  $t_0$  выбирается так, чтобы  $M(t_0) = r$ , т.е.  $t_0$  — одна из точек, в которых периодическая функция  $M$  достигает минимума. Так, в самый первый раз, с произвольными начальными условиями, все подсчеты начнутся в момент  $t_0$  первого достижения минимума функцией  $M$ .

Рассмотрим почти периодическое решение  $y(t; t_0)$  уравнения  $y'' + \gamma^2 y = b(t)$ , удовлетворяющее нулевым начальным условиям  $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ . Это решение и его производная могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} y(t; t_0) &= y_*(t) - y_*(t_0) \cos \gamma(t - t_0) - \gamma^{-1} y'_*(t_0) \sin \gamma(t - t_0), \\ y'(t; t_0) &= y'_*(t) + \gamma y_*(t_0) \sin \gamma(t - t_0) - y'_*(t_0) \cos \gamma(t - t_0). \end{aligned}$$

Из этих формул и периодичности функции  $y_*$  следует общая априорная оценка норм в  $C^1$  всех функций  $y(t, t_0)$ .

По построению  $|y'(t, t_0) - y'_*(t)| \leq M(t_0)$ , поэтому при  $T$  кратных  $2\pi$

$$(П.2) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} |y'(t, t_0) - y'_*(t)| dt \leq 2\pi^{-1} M(t_0) T = 2\pi^{-1} r T.$$

Сделаем в исходном уравнении замену  $x(t) := x(t) + y(t; t_0)$ . Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$(П.3) \quad x'' + \gamma^2 x = \mathfrak{P}(x + y(t; t_0)),$$

начальное условие при этом не изменится. Зададимся некоторым  $T > 0$ . Умножим (П.3) на  $x'(t)$  и проинтегрируем полученное равенство по промежутку  $[t_0, t_0 + T]$ . Основным далее является полученное “энергетическое” равенство

$$[x'(t_0 + T)]^2 + \gamma^2 [x(t_0 + T)]^2 - \gamma^2 R^2 = 2J_T = 2 \int_{t_0}^{t_0+T} x'(t) \mathfrak{P}(x + y(t; t_0)) dt.$$

Величину  $T$  будем выбирать следующим образом. Вначале по числу  $S - 4rH$  выберем число  $n$  — знаменатель подходящей дроби числа  $\gamma$ . Потом выбирается промежуток  $T_0 = 2n\pi$ . Число  $T$  выбирается равным  $KT_0$ , где именно число  $K$  мы будем устремлять к бесконечности. Из лемм следующего раздела и оценки (П.2) следует, что в условиях теоремы 1 при  $T \rightarrow \infty$  величина  $J_T$  становится сколь угодно большим по модулю отрицательным числом, если только решение находится вне некоторого круга на плоскости. Тем самым доказано то, что решение попадет в этот круг, и то, что потом решение будет возвращаться в него через фиксированное время.

## 2. Вспомогательные утверждения.

*Лемма 1.* Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $R_\varepsilon$ , что при некотором достаточно большом  $c_0 = c_0$  соотношение

$$\int_{t_0}^{t_0+T} (x + y(t; t_0))' \mathfrak{P}(x + y(t; t_0)) dt < -\gamma T \frac{S - \varepsilon}{2\pi} + c_1,$$

где

$$c_1 = c_0(|x(t_0)| + |x'(t_0)| + |x(t_0 + T)| + |x'(t_0 + T)|),$$

верно при всех  $t_0, T > 0$ , если только решение  $x$  лежит вне круга радиуса  $R_\varepsilon$  на промежутке  $[t_0, t_0 + T]$ .

Пусть  $m/n$  — подходящая дробь иррационального числа  $\gamma$ . Для каждого знаменателя  $n$  справедлива оценка ([5])

$$(П.4) \quad |\varepsilon_n| \leq n^{-2}, \quad \varepsilon_n = \gamma - \frac{m}{n}.$$

Рассмотрим промежуток времени  $[t_1, t_1 + 2n\pi]$  длины  $2n\pi$ .

*Лемма 2.* По каждому  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $R_{\varepsilon, n}$ , что при каждом  $t_1$  найдется некоторое  $\psi = \psi(t_1)$  при котором

$$(П.5) \quad \left| \int_{t_1}^{t_1+2n\pi} y'_*(t) [\mathfrak{P}(x + y(t; t_0)) - H \operatorname{sign}(\sin(\gamma t + \psi))] dt \right| \leq \varepsilon,$$

если только  $x$  лежит вне круга радиуса  $R_{\varepsilon, n}$  на  $[t_1, t_1 + 2n\pi]$ .

Утверждение леммы вытекает из асимптотической однородности оператора Прейсаха (см. [6, 7]).

*Лемма 3.* По каждому  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $n$ , что при любом  $t_1$

$$(П.6) \quad \left| \int_{t_1}^{t_1+2n\pi} y'_*(t) \operatorname{sign}(\sin(\gamma t + \psi)) dt \right| \leq \varepsilon.$$

3. *Оценка величины  $J_n$ .* Перепишем величину  $J_T$  в виде

$$J_T = \int_{t_0}^{t_0+T} (x'(t) + y'(t; t_0)) \mathfrak{P}(x + y(t; t_0)) dt - \int_{t_0}^{t_0+T} y'(t; t_0) \mathfrak{P}(x + y(t; t_0)) dt.$$

В силу сформулированных лемм

$$J_T = -\gamma T \frac{S - \varepsilon}{2\pi} + c_1 - \int_{t_0}^{t_0+T} y'(t; t_0) \mathfrak{P}(x + y(t; t_0)) dt \leq -\gamma T \frac{S - 4Hr - 2\varepsilon}{2\pi} + c + c_1.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Еще раз подчеркнем, что мы фиксируем достаточно большое  $R$  и доказываем, что решение с конкретными начальными условиями (П.1) уйдет в шар фиксированного радиуса. При этом время (число  $n$ ), за которое мы достигнем желаемого результата, зависит от  $R$  и может быть выбрано сколь угодно большим. Далее, после того как за какое-то время, зависящее от начальных данных, мы войдем в шар некоторого фиксированного радиуса, число  $n$  фиксируется для этого радиуса. За это время решение не может уйти далеко из этого шара: как только оно из него выходит, начинает действовать поглощение энергии и решение идет назад. Теорема 1 доказана.

Рис. 3

4. *Доказательство леммы 1.* Для доказательства этой леммы воспользуемся свойством 2 (см. раздел 2). Очевидно (см. рис. 3), что каждое достаточно удаленное от начала координат решение  $x(t)$  удовлетворяет (на соответствующем промежутке времени) всем предположениям утверждения 1. Оценим минимальное число  $N$  “оборотов” кривой  $(x, x')$  за период времени  $2n\pi$  и докажем, что  $N > m - 2$ . Для этого оценим время, при котором решение лежит внутри полосы  $-R_0 \leq x \leq R_0$  и время, которое это решение проводит вне ее.

На каждое пересечение полосы вправо или влево затрачивается время порядка  $R_0/R_*$ , причем чем дальше от начала координат лежит решение, тем меньше это время отличается от нуля.

Вне полосы гистерезисная нелинейность принимает значения  $\pm H$  и движение происходит по траекториям линейного неоднородного дифференциального уравнения  $x'' + \gamma^2 x = \pm H$ . Каждая такая траектория периодична, и на прохождение полукруга (это чуть больше, чем просто вне полосы) требуется время порядка  $\pi/\gamma$ , причем чем дальше от начала координат лежит решение, тем меньше это время отличается от  $\pi/\gamma$ .

Таким образом, за время порядка  $2\pi/\gamma$  каждое решение  $x(t)$  с достаточно большим начальным условием осуществляет ровно один поворот. За время  $2n\pi \approx 2m\pi/\gamma$  делается  $m$  таких поворотов. Если учесть, что первый и последний повороты могут быть неполными, то  $N > m - 2$ . Постоянная  $c_0$  возникает именно из-за первого и последнего поворотов. Она зависит от начальных условий и конечного положения, линейная оценка очевидна.

Лемма 1 доказана.

5. *Доказательство леммы 3.* Так как

$$\left| \int_{t_1}^{t_1+2n\pi} y'_*(t) \operatorname{sign}(\sin(\gamma t + \psi)) dt \right| = \frac{1}{\gamma} \left| \int_{t_2}^{t_2+2n\pi/\gamma} y'_*(t/\gamma) \operatorname{sign}(\sin(t + \psi)) dt \right|$$

и функция  $y'_*$  липшицева, то в силу (П.4) величина

$$\left| \int_{t_2}^{t_2+2n\pi/\gamma} y'_*(t/\gamma) \operatorname{sign}(\sin(t + \psi)) dt - \int_{t_2}^{t_2+2m\pi} y'_*(nt/m) \operatorname{sign}(\sin(t + \psi)) dt \right|$$

произвольно мала при больших  $n$  и  $m$ . Таким образом, для доказательства леммы достаточно оценить величину

$$J_0 = \left| \int_{t_2}^{t_2+2m\pi} y'_*(nt/m) \operatorname{sign}(\sin(t + \psi)) dt \right| = m \left| \int_0^{2\pi} y'_*(nt) \operatorname{sign}(\sin(mt + \psi)) dt \right|.$$

Для оценки  $J_0$  разложим в ряд Фурье функции  $y'_*(nt)$  и  $\operatorname{sign}(\sin(mt + \psi))$ :

$$y'_*(nt) = n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_k}{\gamma^2 - k^2} \cos(nkt + \varphi_k), \quad \operatorname{sign}(\sin(mt + \psi)) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1,3,\dots} \frac{\sin(j(mt + \psi))}{j}.$$

В силу взаимной простоты чисел  $m$  и  $n$  после интегрирования останутся только произведения гармоник с  $k = sm$  и  $j = sn$  при нечетных  $s$  и  $n$ , следовательно

$$J_0 \leq 4nm \sum_{s=1,3,\dots} \left| \frac{ms a_{ms}}{ns(\gamma^2 - (ms)^2)} \right| \leq 4c_0 m^2 \sum_{s=1,3,\dots} \left| c(ms)^{-2-\delta} \right| \leq c_1 m^{-\delta}$$

( $|a_k| \leq ck^{-\delta}$ ). Лемма 3 доказана.

*6. Доказательство теоремы 2.* Эта теорема доказывается совершенно другими методами. Вместо геометрических конструкций на плоскости мы пользуемся конструкциями в бесконечномерных пространствах периодических функций.

Пусть  $n \in \mathfrak{N}_{\varepsilon, K}$ , т.е.  $|\sigma_n| \leq Kn^{-1-\varepsilon}$ . Пусть  $n$  достаточно велико.

Сделаем линейную замену времени в уравнении (1). Каждое  $2n\pi$ -периодическое решение уравнения (1) взаимно однозначно соответствует  $2\pi$ -периодическому решению уравнения

$$(П.7) \quad \frac{1}{n^2} x'' + \gamma^2 x = b(nt) + \mathfrak{P}(x).$$

Предположим, что у (П.7) есть  $2\pi$ -периодическое решение, представим его в виде

$$(П.8) \quad x(t) = R \sin(mt + \theta) + h(t)$$

(функция  $h$  содержит остальные гармоники).

“ $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ ”

Введем проектор

“ $\mathcal{L}, \mathcal{H}$ ”:

$$\mathcal{P}x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos m(t-s)x(s) ds$$

рукописные

латинские

“ $P, Q$ ”

“ $L, H$ ”

на плоскость  $E$ , натянутую на функции  $\sin mt$  и  $\cos mt$ , и проектор  $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$  на дополнительное подпространство  $E^\perp$ , состоящее из функций  $x$ , для которых  $\mathcal{P}x = 0$ . В  $L^2$  эти проекторы ортогональны. Рассмотрим дифференциальный оператор  $\mathcal{L} = n^{-2}(d/dt)^2 + \gamma^2$ . Этот оператор с  $2\pi$ -периодическими граничными условиями непрерывно обратим. Через  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^{-1}$  обозначим линейный оператор, сопоставляющий каждой функции  $y \in L^2$  единственное  $2\pi$ -периодическое решение  $x = \mathcal{H}y \in W$  линейного уравнения  $\mathcal{L}x = y(t)$ .

Подпространства  $E$  и  $E^\perp$  являются инвариантными для  $\mathcal{H}$ , норма  $\mathcal{H}$  в  $E$  и  $E^\perp$  существенно различается: оператор  $\mathcal{H}\mathcal{P}$  имеет норму

$$\|\mathcal{H}\mathcal{P}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \left| \frac{n^2}{n^2\gamma^2 - m^2} \right| = |\sigma_n|^{-1},$$

а оператор  $\mathcal{H}\mathcal{Q}$  имеет норму

$$\|\mathcal{H}\mathcal{Q}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \sup_{k=0,1,2,\dots,m-1,m+1,m+2,\dots} \left| \frac{n^2}{n^2\gamma^2 - k^2} \right|.$$

Если  $n \in \mathfrak{N}_{\varepsilon, K}$ , то при достаточно большом<sup>3</sup>  $c > 0$  справедливы оценки  $\|\mathcal{H}\mathcal{Q}\|_{L^2 \rightarrow C} \leq cn$ . Отсюда следуют оценки  $\|h\|_C \leq cn$  компонент  $h$  всех  $2\pi$ -периодических решений  $x(t)$  уравнения (П.7). Более тонкими рассуждениями можно установить существенно более сильную оценку  $\|h\|_C \leq c$ ; теорему 2 можно доказать и без нее.

Ниже используются соотношения  $\mathcal{P}\mathcal{H}y = \mathcal{H}\mathcal{P}y = \sigma_n^{-1}y$ ,  $\mathcal{Q}b(nt) = b(nt)$  и тождество

$$(П.9) \quad \int_0^{2\pi} y(t) \frac{d}{dt} \mathcal{H}y(t) dt \equiv 0, \quad y \in L^2.$$

<sup>3</sup>Здесь и ниже одной и той же буквой  $c$  обозначены некоторые положительные постоянные, их точная величина не играет роли в доказательствах, важен лишь факт их существования.

Оно выполнено, так как для каждой гармоники  $\sin(kt + \phi)$  функции  $y$  верны равенства  $\mathcal{H} \sin(k + \phi) = c \sin(kt + \phi)$ , поэтому  $(\mathcal{H} \sin(kt + \phi))' = c_1 \cos(kt + \phi)$ .

Дифференциальное уравнение (П.7) с  $2\pi$ -периодическими краевыми условиями эквивалентно операторному уравнению

$$(П.10) \quad x = \mathcal{H}(b(nt) + \mathfrak{P}x).$$

Это уравнение эквивалентно системе из двух уравнений:  $\mathcal{P}x = \mathcal{H}\mathcal{P}(b(nt) + \mathfrak{P}x)$ ,  $\mathcal{Q}x = \mathcal{H}\mathcal{Q}(b(nt) + \mathfrak{P}x)$ , которые после простейших упрощений приобретают вид

$$(П.11) \quad R \sin(mt + \theta) = \sigma_n^{-1} \mathcal{P} \mathfrak{P}x, \quad h = \mathcal{H}b(nt) + \mathcal{H}\mathcal{Q} \mathfrak{P}x.$$

Первое уравнение — это уравнение на плоскости  $E$ . Его можно переписать в виде двух равенств проекций на функции  $\sin(mt + \theta)$  и  $\cos(mt + \theta)$ :

$$(П.12) \quad \pi \sigma_n R = \int_0^{2\pi} \sin(mt + \theta) \mathfrak{P}x dt, \quad 0 = \int_0^{2\pi} \cos(mt + \theta) \mathfrak{P}x dt.$$

Следующее вспомогательное утверждение может быть найдено в [6]. По духу оно очень близко к своим аналогам для функциональных нелинейностей с насыщением, впервые замеченным А. Лазером в 1970г. и потом широко использованным многими авторами: С. Фучик, Ж. Мавен, П. Гесс и др. Это утверждение следует из простых рассуждений: мера тех значений  $t$ , при которых  $|x(t)|$  невелико, стремиться к нулю; если  $|x(t)|$  велико, то  $\mathfrak{P}x = \text{sign}(\sin(mt + \theta))$ .

*Лемма 4. При  $R \rightarrow \infty$*

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt + \theta) \mathfrak{P}(R \sin(mt + \theta) + h(t)) dt \rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(mt + \theta) \text{sign}(\sin(mt + \theta)) dt \equiv 4H$$

*равномерно по всем  $\theta$  и  $h : \|h\|_C R^{-1} \rightarrow 0$ .*

Из первого равенства (П.12) в силу условия  $R/n \rightarrow \infty$  и оценки  $\|h\|_C \leq cn$  вытекает, что  $R \approx 4\sigma_n^{-1}H/\pi$ , т.е. в (П.8) основным является слагаемое  $R \sin(mt + \theta)$ .

Умножим второе равенство (П.12) на  $mR$  и преобразуем его к виду

$$\int_0^{2\pi} h'(t) \mathfrak{P}x dt = \int_0^{2\pi} (mR \cos(mt + \theta) + h'(t)) \mathfrak{P}x dt.$$

Это уравнение в силу равенств  $\mathcal{Q}h' = h'$  и

$$\int_0^{2\pi} x'(t) \mathfrak{P}x(t) dt = -mS$$

можно переписать в виде

$$(П.13) \quad \int_0^{2\pi} h'(t) \mathcal{Q} \mathfrak{P}x dt = -mS.$$

Подставим теперь в уравнение (П.13) значение для  $h'$  из второго уравнения (П.11):

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} (\mathcal{H}b(nt) + \mathcal{H}\mathcal{Q} \mathfrak{P}x) \mathcal{Q} \mathfrak{P}x dt = -mS.$$

Последнее равенство в силу (П.9) можно переписать в виде

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} (\mathcal{H}b(nt)) \mathfrak{P}x dt = -mS,$$

отсюда при больших значениях  $n \in \mathfrak{N}_{\varepsilon, K}$  следует соотношение

$$(П.14) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} (\mathcal{H}b(nt)) \mathfrak{P}x dt = -mS.$$

Функция  $\frac{d}{dt} (\mathcal{H}b(nt))$  может быть вычислена в явном виде с использованием ряда Фурье

$$b(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt + \varphi_k), \quad a_k \geq 0$$

функции  $b$ :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{H}b(nt)) = nv(nt) = n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka_k}{\gamma^2 - k^2} \sin(knt - \varphi_k).$$

Так как ряд  $\sum a_k/k$  абсолютно сходится, то функция  $v(t)$  непрерывна и ограничена. Отсюда и из (П.14) следует, что

$$\int_0^{2\pi} v(nt) \mathfrak{P}x dt = -mS/n$$

и, если мы покажем, что

$$(П.15) \quad \int_0^{2\pi} v(nt) \mathfrak{P}x dt \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , то получится противоречие, доказывающее теорему 2. Для доказательства (П.15) разобьем интеграл в левой части на два слагаемых:

$$\int_0^{2\pi} v(nt) \mathfrak{P}x dt = H \int_0^{2\pi} v(nt) \operatorname{sign}(\sin(mt+\theta)) dt + \int_0^{2\pi} v(nt) (\mathfrak{P}x - H \operatorname{sign}(\sin(mt+\theta))) dt.$$

Так как  $m$  и  $n$  взаимно просты, после разложения в ряд Фурье обоих множителей под знаком интеграла в первом слагаемом там останутся только гармоники кратные и  $m$ , и  $n$ . При больших  $m$  и  $n$  все эти слагаемые легко оцениваются соответствующими коэффициентами  $a_{kmn}$ , ряд из которых абсолютно сходится и первое слагаемое стремится к нулю.

Второе слагаемое допускает оценку

$$\left| \int_0^{2\pi} v(nt) (\mathfrak{P}x - H \operatorname{sign}(\sin(mt + \theta))) dt \right| \leq c \int_0^{2\pi} |\mathfrak{P}x - H \operatorname{sign}(\sin(mt + \theta))| dt.$$

Если  $|R \sin(mt + \theta)| \geq cn$ , то  $\mathfrak{P}x = H \operatorname{sign}(\sin(mt + \theta))$ . Поэтому

$$\int_0^{2\pi} |\mathfrak{P}x - H \operatorname{sign}(\sin(mt + \theta))| dt \leq c \operatorname{mes}\{R \sin(mt + \theta) < cn\} \rightarrow 0,$$

и (П.15) доказано.

## Список литературы

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
2. *Mayergouz I. D.* Mathematical models of hysteresis. N.Y.: Springer-Verlag, 1991.
3. *Krejci P.* Resonance in Preisach systems // Appl. Math. 2000. V. 45. №6. P. 439-468.
4. *Красносельский А.М., Покровский А.В.* О субгармониках больших амплитуд в полулинейном осцилляторе Дуффинга // Докл. АН. 2003. Т. 391. №4. С. 449-452.
5. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М.: ГИФМЛ, 1961.
6. *Bliman P.A., Krasnosel'skii A.M., Sorine M., Vladimirov A.A.* Nonlinear resonance in systems with hysteresis // Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 1996. V. 27. №5. P. 561-577.
7. *Krasnosel'skii A.M.* Asymptotic homogeneity of hysteresis operators // ZAMM. 1996. V. 76. P. 313-316.

Рисунки к статье:

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А.В. ПОКРОВСКИЙ

Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением

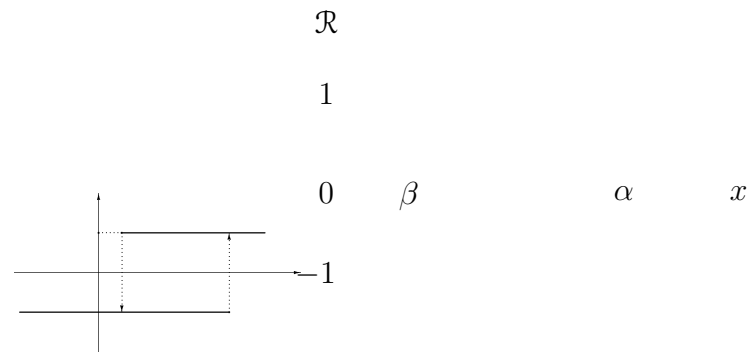


Рис. 1. Неидеальное реле

Рисунки к статье:

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А.В. ПОКРОВСКИЙ

Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением

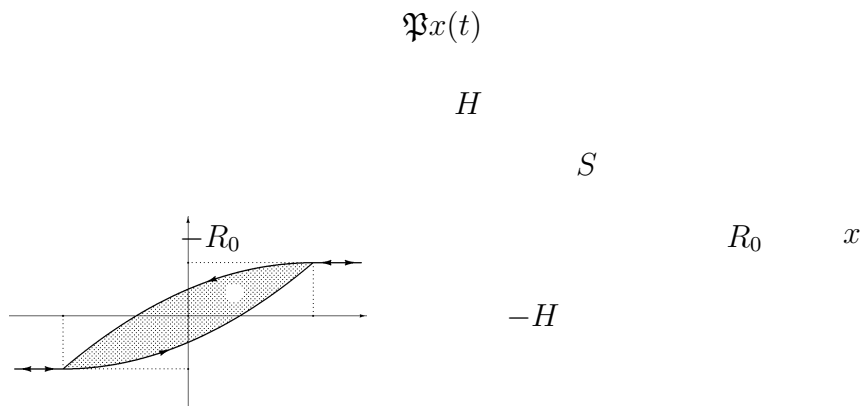


Рис. 2. Нелинейность Прейсаха

Рисунки к статье:

А.М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А.В. ПОКРОВСКИЙ

Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением

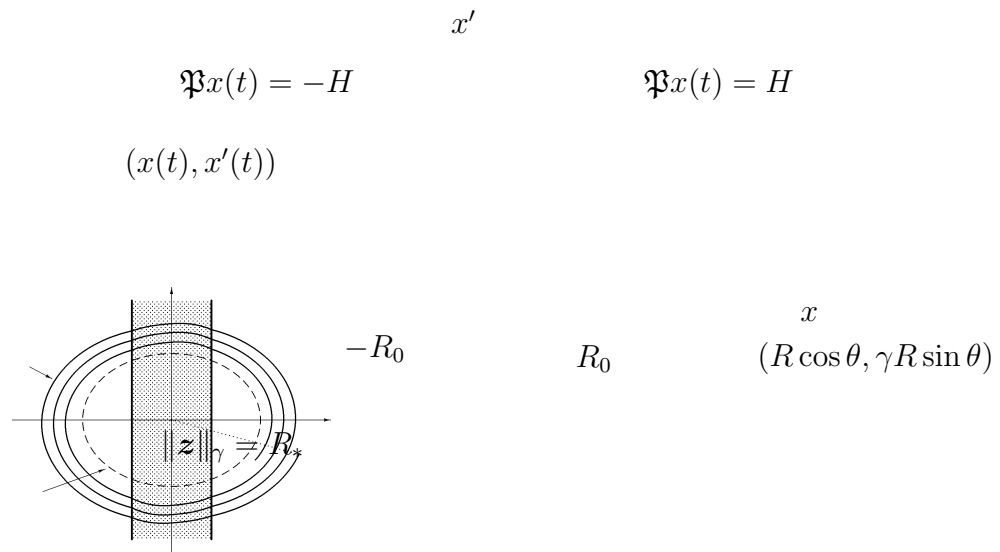


Рис. 3. Траектории решения на плоскости  $(x, x')$

А.М. Красносельский, А.В. Покровский

**Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением**

**Р Е Ф Е Р А Т**

Доказывается диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением при достаточно широкой петле гистерезиса, указана простая явная оценка. Доказано отсутствие субгармоник больших амплитуд при сколь угодно узкой петле.

*Контактные телефоны:*

Красносельский Александр Маркович

служебный: **299-83-54**

мобильный: **8-916-494-1576**

Домашний: **420-59-39**

E-mail: [Sashaamk@iitp.ru](mailto:Sashaamk@iitp.ru)

Ссылки для перевода на английский

1. Krasnosel'skiĭ M.A., Pokrovskii A.V. Systems with hysteresis. Berlin – Heidelberg – New York, Springer, 1989.
2. Mayergoyz I. D. Mathematical models of hysteresis. New York: Springer-Verlag, 1991.
3. Krejci P. Resonance in Preisach systems // Appl. Math. 2000. V. 45. №6. p. 439-468.
4. Krasnosel'skiĭ A.M., Pokrovskii A.V. Subharmonics of large amplitudes in a semilinear Duffing oscillator, Doklady Mathematics, 68, 1 (2003) 84-88
5. Khinchin A.Ya. Continued Fractions. University of Chicago Press, 1961.
6. Bliman P.A., Krasnosel'skiĭ A.M., Sorine M., Vladimirov A.A. Nonlinear resonance in systems with hysteresis // Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1996. V. 27. №5. P. 561-577.
7. Krasnosel'skiĭ A.M. Asymptotic homogeneity of hysteresis operators // ZAMM. 1996. V. 76. 313-316.