В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Заседание 27 мая 1947 г.

1. Л. В. Келдыш, Непрерывные отображения компактов.

Мы изучаем непрерывные отображения лежащих в эвклидовом пространстве компактов $Y=f(X)$, при которых происходит повышение размерности. Известно, что компакт F размерности n может быть представлен как сумма конечного числа компактов $F=\sum\limits_{i=1}^{N} F_i$ так, что

$$\dim F_{i_1}\cdot F_{i_2}\cdots F_{i_k}\leqslant n-k-1. \tag{1}$$

где $\dim A$ обозначает размерность A;

Мы называем разбиение F на компакты *правильным*, если условие (1) выполнено.

Если диаметры всех слагаемых разбиения меньше ε, мы называем его ε-разбиением.

Теорема. *Для того чтобы при непрерывном отображении $Y=f(X)$ компакта X компакт Y имел размерность m, необходимо и достаточно, чтобы m было наименьшим числом, для которого, каково бы ни было ε, существует правильное разбиение X на куски*[1], $X=\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, *индуцирующее ε-разбиение $Y=\sum\limits_{i=1}^{N} f(X_i)$ порядка m*[2].

П. С. Александровым была высказана гипотеза, что всякое непрерывное отображение f, повышающее размерность, может быть представлено как итерация двух отображений $f=\varphi\psi$, где ψ не повышает размерности, а φ — конечно-кратно (т. е. прообраз каждой точки конечен). Такое представление мы называем далее *представлением А*.

Если кратность любой точки при отображении φ не выше k, мы называем φ k-кратным.

И. А. Вайнштейн показал, что для неприводимого отображения нульмерного компакта на отрезок представление A всегда возможно, не дав, однако, оценки для кратности φ. Им же указаны примеры непрерывных отображений одномерного компакта на двумерный, для которых представление A невозможно.

Мы изучаем вопрос о возможности представления A для непрерывных отображений нульмерного компакта: $\dim X=0$. Мы находим прежде всего необходимое и достаточное условие для того, чтобы для непрерывного отображения нульмерного компакта представление A было возможно.

Далее мы рассматриваем *каноническое* представление нульмерного компакта X:

$$X=\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{N_m}\delta_{mi},$$

[1]) Куском X называется замыкание открытого в X множества.

[2]) Т. е. пересечение элементов разбиения по $m+2$ пусто.

где δ_{mi} — куски X, причём $\delta_{mi}\cdot\delta_{mj}=0$, каждый $\delta_{m+1,j}$ содержится в некотором δ_{mi}, и диаметры δ_{mi} стремятся к нулю с возрастанием m.

Теорема. *Пусть X и Y — компакты, $\dim X=0$, $\dim Y=n$ и $Y=f(X)$ — непрерывное отображение. Если существует такое k, что пересечение любых k-образов элементов ранга m канонического представления X всегда нульмерно или пусто, то существует представление $f=\varphi\psi$, где $\psi(X)$ нульмерно, а φ — не более чем $n+k-1$-кратно.*

Следствие. *Для неприводимого отображения нульмерного компакта P на сегмент $I=f(P)$ возможно представление A, $f=\varphi\psi$ с двукратным φ. (Так как в этом случае $n=1$ и $k=2$.)*

В заключение мы указываем примеры непрерывных отображений нульмерного компакта, для которых представление A невозможно.

Именно, мы указываем пример *неприводимого* отображения канторовского совершенного множества P на квадрат $C=f(P)$, для которого представление A невозможно, если даже допустить, что кратность φ не ограничена.

И, наконец, мы даём простой пример *приводимого* отображения канторовского совершенного множества на сегмент, для которого представление A также невозможно.

2. М. И. Вишик, Метод ортогональных проекций для дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Метод ортогональных проекций для случая уравнения Лапласа $\Delta u=0$ применил Г. Вейль в [1]. Для случая эллиптического самосопряжённого уравнения второго порядка результаты докладчика изложены в его заметке [2], а для случая общих эллиптических уравнений любого порядка — в его диссертации [3].

Ограничимся для простоты изложения случаем бигармонического уравнения $\Delta\Delta u=0$, рассматриваемого в произвольной ограниченной области G.

Пусть $H(\Delta^2)$ — гильбертово пространство, элементами которого являются системы из 9 суммируемых в квадрате функций $(h_{ik}(x_1, x_2, x_3))=(h)$, $i, k=1, 2, 3$, причём предполагается, что $h_{ik}(x_1, x_2, x_3)=h_{ki}(x_1, x_2, x_3)$ $((x_1, x_2, x_3)\in G)$; скалярное произведение в $H(\Delta^2)$ задаётся формулой:

$$((h), (g))=\iiint\limits_G \sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, g_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Пусть $\Psi(\Delta^2)$ — подпространство пространства $H(\Delta^2)$, имеющее всюду плотным множеством совокупность элементов $(\psi_{ik}(x_1, x_2, x_3))=(\psi)$, компоненты которых $\psi_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ суть дважды непрерывно дифференцируемые в области G функции, удовлетворяющие уравнению

$$\sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial^2\psi_{ik}}{\partial x_i\partial x_k}=0.$$

Пусть $\Psi^0(\Delta^2)$ — подпространство $\Psi(\Delta^2)$, являющееся замкнутой линейной оболочкой совокупности элементов $(\psi^0_{ik}(x_1, x_2, x_3))=(\psi^0)$, обладающих следующим свойством: для каждого элемента $(\psi^0_{ik}(x_1, x_2, x_3))$ существует некоторый куб $K_{(\psi^0)}$ $(\overline{K}_{(\psi^0)}\in G)$, вне которого все функции $\psi^0_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ обращаются в нуль.

Пусть, далее, $U(\Delta^2)$ — подпространство $\Psi(\Delta^2)$, состоящее из элементов $(u_{x_ix_k}(x_1, x_2, x_3))=(u)$, каждый из которых обладает следующим свойством: в любом кубе $K\subset G$ существует *бигармоническая* функция $u^{(K)}(x_1, x_2, x_3)$, имеющая в K своими вторыми частными производными соответствующие функции $u_{x_ix_k}(x_1, x_2, x_3)$:

$$\frac{\partial^2 u^{(K)}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i\,\partial x_k}=u_{x_ix_k}(x_1, x_2, x_3),\quad ((x_1, x_2, x_3)\in K).$$

Доказывается, что имеет место следующее ортогональное разложение:

$$\Psi(\Delta^2)=U(\Delta^2)\oplus\Psi^0(\Delta^2). \tag{1}$$

Это ортогональное разложение эквивалентно решению некоторой краевой задачи. Доказывается, что эта краевая задача, в случае гладкой границы области, состоит в задании на контуре области G значений следующих двух дифференциальных выражений:

$$l_n(u)=\frac{\partial u_{x_1}}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{x_2}}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{x_3}}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x_3}, \tag{2'}$$

$$l^S(u)=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left[\sqrt{EG-F^2}\left(\frac{\partial u_{x_1}}{\partial n}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{x_2}}{\partial n}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{x_3}}{\partial n}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_3}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left[\sqrt{EG-F^2}\left(\frac{\partial u_{x_1}}{\partial n}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{x_2}}{\partial n}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{x_3}}{\partial n}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_3}\right)\right]\right\}+\frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}, \tag{2''}$$

где λ_1, λ_2 — локальные координаты на границе области, n — нормаль, E, G, F — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S (границы области G). Заметим, что выражение $l^S(u)$ не зависит от выбора локальной системы координат (λ_1, λ_2).

В том случае, когда область G — произвольная, установлено, что существует решение, для которого на любой последовательности аппроксимирующих контуров выражения (2′) и (2″) ведут себя заранее заданным образом (при этом имеет место теорема единственности решения).

Указанная выше краевая задача для бигармонического уравнения аналогична задаче Неймана для случая уравнения Лапласа.

Для бигармонического уравнения установлено ещё ортогональное разложение типа (1), соответствующее решению той краевой задачи, когда на границе области задаются значения u и $\frac{\partial u}{\partial n}$; кроме того, найдены ортогональные разложения, соответствующие решению ряда смешанных задач.

Далее методом ортогональных проекций доказано существование многозначных решений уравнения $\Delta\Delta u=0$ с заданными периодами в *произвольной* области G.

Пусть $(f_{x_ix_k}(x_1, x_2, x_3))=(f)$ — некоторый элемент из $H(\Delta^2)$, обладающий тем свойством, что в любом кубе K существует функция $f^{(K)}(x_1, x_2, x_3)$, имеющая в K своими вторыми частными производными соответствующие компоненты элемента (f):

$$\frac{\partial f^{(K)}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i\,\partial x_k}=f_{x_ix_k}(x_1, x_2, x_3) \text{ для } (x_1, x_2, x_3)\in K.$$

Будем говорить, что функция $f^{(K)}$ *соответствует* элементу (f) в кубе K.

Пусть C — некоторая замкнутая кривая в G. Покроем её цепочкой кубов $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Пусть функция $f^{(K_1)}(x_1, x_2, x_3)$ соответствует элементу (f) в кубе K_1. Пусть функция $f^{(K_2)}(x_1, x_2, x_3)$ является непрерывным продолжением в куб K_2 функции $f^{(K_1)}(x_1, x_2, x_3)$ и соответствует элементу (f) в кубе K_2. Продолжим $f^{(K_2)}(x_1, x_2, x_3)$ таким же образом в куб K_3 и т. д. Наконец, продолжая функцию $f^{(K_n)}(x_1, x_2, x_3)$ в куб K_1, мы получим некоторую функцию $\bar{f}^{(K_1)}(x_1, x_2, x_3)$. Очевидно, имеем:

$$\bar{f}^{(K_1)}(x_1, x_2, x_3)=f^{(K_1)}(x_1, x_2, x_3)+C_0+C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3.$$

Систему коэффициентов (C_i) назовём периодом элемента (f) вдоль пути C: $\pi_C(f)=\{C_i\}$. Легко заметить, что таким образом определённый период не зависит от произвола, заключающегося в указанной выше конструкции, и не меняется при замене кривой C на гомологичную ей.

Доказывается, что проекция (u) элемента (f) на подпространство $U(\Delta^2)$ (см. данное выше определение) имеет те же периоды, что и элемент (f), для любой кривой C в области G:

$$\pi_C(f)=\pi_C(u).$$

Отметим ещё, что установлены ([3]) ортогональные разложения типа (1) для общего самосопряжённого уравнения порядка $2m$ $L(u)=0$ и различных краевых задач. Кроме того, доказана (аналогичная приведённой выше) теорема существования многозначных решений для общего уравнения $L(u)=0$ ([3]).

[1] H. Weyl, Duke J., 7 (1940), 411.

[2] М. И. Вишик, ДАН, т. LVI, № 2 (1947), 115—118.

[3] М. И. Вишик, Диссертация, Математический институт АН СССР (1947).

3. На заседании избраны членами Общества тт.: М. М. Вайнберг, Л. И. Волковыский, М. И. Граев, Е. Б. Дынкин, А. М. Обухов, С. Б. Стечкин.

Заседание 3 июня 1947 г.

1. Н. Г. Чеботарёв. (Казань.) О выражении абелевых интегралов через логарифмы.

Доклад посвящён изложению части работы, опубликованной автором в т. II вып. 2 (18) «Успехов математических наук».

2. Н. Г. Чудаков. (Саратов.) О законах распределения простых чисел в «коротких» прогрессиях.

В докладе даётся краткое изложение работ Н. Г. Чудакова и К. А. Родосского.

1) Пусть даны целые числа k и l, причём $(k, l)=1$; $\varepsilon>0$, $\varkappa$ — достаточно большое положительное число, $h=\varphi(k)$;

$$u=\varkappa^{\frac{9}{8}},$$

$$\psi(\varkappa, k, l)=\sum_{n\equiv l \pmod k} \lambda(n),$$

где $\lambda(n)$ — функция Mangoldt'a.

Тогда для $\varkappa \geqslant C^{c(\ln k)^{3+t}}$ справедливо тождество

$$\frac{\psi(\varkappa+u, k, l)-\psi(\varkappa, k, l)}{uh^{-1}}=1+E(k)\,\frac{(\varkappa\mp u)^{\beta}-\varkappa^{\beta}}{\beta u}\chi_1(l)-o(1), \tag{1}$$

где $\chi_1(n)$ и β суть соответственно «исключительные» характер и нуль Page'a; $E(k)=1$, если для данного k существует «исключительный» характер и $E(k)=0$ в противоположном случае.

Аналогичные результаты получил К. А. Родосский. Именно он показал, что

$$\pi(\varkappa, k, l)=\frac{1}{h}\sum_{2\leqslant n\leqslant\varkappa}\frac{1}{\ln n}-E(k)\frac{\chi_1(l)}{h}\sum_{2\leqslant n\leqslant\varkappa}\frac{n^{\beta-1}}{\ln n}+\frac{\varkappa}{h\ln\varkappa}O\left(e^{-c\frac{\ln\varkappa}{\ln k}}\right), \tag{2}$$

где c — положительная постоянная.

2) Пусть последовательность целых чисел

$$k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots \tag{3}$$

такова, что $(k_\nu, l)=1$, где l — данное целое число; кроме того, пусть $\chi_1(l)$, где χ_1 — исключительный характер, $\operatorname{mod} k_\nu$. Для таких прогрессий можно тождества (1) и (2) заменить неравенствами

$$\frac{\psi(\varkappa+u, k, l)-\psi(\varkappa, k, l)}{uh^{-1}}\geqslant 1+o(1) \tag{1'}$$

для

$$\varkappa\geqslant e^{c(\ln k)^{3+\varepsilon}};$$

$$\pi(\varkappa, k, l)\geqslant h^{-1}\,li\,\varkappa+\frac{\varkappa}{h}\,O\left(e^{-c\frac{\ln\varkappa}{\ln k}}\right),$$

для

$$\ln^{1+\varepsilon} k \leqslant \ln x \leqslant (\ln k)^{\frac{7}{3}},$$

что позволяет сделать заключение о большой плотности простых чисел в прогрессиях, разности которых равны числам последовательности (3). Пример последовательности типа (3) можно построить следующим образом. Пусть $l = 2^{\alpha} l' l''$, где l' — нечётное число, не содержащее точного квадрата, $l'' = 1$ или точному нечётному квадрату. Доказывается, что можно найти такое нечётное λ, которое взаимно просто с l и которое удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\lambda}{l'}\right) = (-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8}\alpha + \frac{l'-1}{2}\frac{\lambda-1}{2}}.$$

Тогда в качестве последовательности типа (3) можно взять последовательность простых чисел в прогрессии

$$\lambda + 8l'\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

3. В. А. Ефремович, Трёхмерные правильные многогранники.

Под (локально) правильным n-мерным многогранником здесь будет пониматься многогранник, грани которого суть n-мерные элементы, ограниченные правильными изоморфными многогранниками $n-1$ измерений, и звёзды вершин (т. е. грани дуального многогранника) тоже суть n-мерные элементы, ограниченные правильными изоморфными многогранниками $n-1$ измерений.

Под интегрально правильным многогранником будет пониматься многогранник, допускающий полную группу автоморфизмов, т. е. такой, что существует автоморфизм всего многогранника, осуществляющий любой заданный автоморфизм какой-нибудь грани, а также автоморфизм, переводящий её в произвольную другую.

Два правильных многогранника назовём локально изоморфными (или принадлежащими одному локальному типу), если грани одного изоморфны граням другого и звёзды вершин — звёздам вершин другого. У всех локально изоморфных многогранников существует общий универсальный накрывающий многогранник П, который можно реализовать как метрически правильный в эвклидовой, гиперболической или сферической метрике. Соответственно этим возможностям и сам локальный тип назовём параболическим, гиперболическим или эллиптическим.

Каждый правильный многогранник P можно получить из его универсального накрывающего П путём отождествления точек последнего, эквивалентных по отношению к некоторой группе Ф движений (Ф — фундаментальная группа P). Группа движений P изоморфна фактор-группе нормализатора Ф по Ф. Поэтому Ф тогда и только тогда интегрально правилен, когда Ф является нормальным делителем группы автоморфизмов П.

Доклад содержит перечисление правильных трёхмерных многогранников эллиптических типов.

Заседание памяти Нила Александровича Глаголева

8 июня 1947 г. в Доме учёных происходило организованное Механико-математическим факультетом Московского Государственного университета, Домом учёных и Московским математическим обществом заседание, посвящённое памяти Нила Александровича Глаголева.

С докладами выступили: С. В. Бахвалов, И. Н. Денисюк, А. А. Глаголев, Д. И. Перепёлкин.

Далее следовали многочисленные выступления товарищей и учеников Н. А. Глаголева. От имени Общества выступил С. П. Фиников, от имени факультета — В. В. Голубев.

Заседание 10 июня 1947 г.

Заседание посвящено обзорному докладу

А. Н. Колмогоров, О некоторых новых работах по теории вероятностей.

Заседание памяти Алексея Константиновича Власова

17 июня 1947 г. происходило совместное заседание Механико-математического факультета Московского Государственного университета и Московского математического общества, посвящённое памяти Алексея Константиновича Власова.

С докладами и воспоминаниями выступили: С. С. Бюшгенс, А. А. Глаголев, А. Н. Колмогоров, С. П. Фиников, В. В. Степанов.