где функция $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $\omega'(p)$ может менять знак в конечной области изменения p при начально-краевых условиях

$$(2) \qquad u(x,\ 0) = u_0(x), \quad u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0.$$

Как указано в [1], [2], для задачи (1), (2) имеет смысл рассматривать только обобщенные решения, поскольку в случае общего положения классические решения не существуют для неаналитических начальных данных, а для аналитических существуют только локально. Кроме того, следует отметить, что для рассматриваемой задачи не проходят стандартные схемы доказательства существования обобщенных решений в силу немонотонности оператора в правой части (1).

В работе [2] доказана локальная теорема существования континуума регулярных решений (т. е. решений, для которых все входящие в уравнение (1) выражения суммируемы с квадратом) задачи Неймана для уравнения (1) в предположении о кусочной линейности функции ω. В настоящей работе на основе другой техники для широкого класса функций ω и некоторого множества начальных данных доказаны теорема существования континуума регулярных решений задачи (1), (2) и теорема об устойчивости стационарных регулярных решений, на которых функция ω' положительна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа.— Новосибирск: Наука, 1983.

[2] Hollig K. Existence of infinitely many solutions for a forward backward heat equation//TAMS. — 1983.— V. 278, № 1.— P. 299—316.

5. Я. И. Канель «О системе уравнений реакции-диффузии с балансным условием».

Рассмотрим задачу Коши

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i \Delta u_i = f_i(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad u_i(0,\ x) = u_i^0(x),$$

$$i = 1,\ \ldots,\ n, \quad u = (u_1,\ \ldots,\ u_n), \text{ где } \lambda_i = \mathrm{const} > 0,$$

$$0 \leqslant u_i^0(x) \leqslant c_i = \mathrm{const},\ f_i(u) \geqslant 0 \text{ при } u_i = 0,\ u \geqslant 0,$$

выполняется балансное условие

$$(2) \qquad f_1(u) + \ldots + f_n(u) = 0.$$

Пусть $u = u(t,\ x)$ — классическое решение задачи (1), $v_i = v_i(t,\ x)$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ — решение задачи

$$(3) \qquad Lv_i \equiv \frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda \Delta v_i = u_i, \quad t > 0, \quad v_i(0,\ x) = 0, \quad \lambda > \max_i \lambda_i,$$

$\lambda = \mathrm{const}$, $z = z(t,\ x)$ — решение задачи

$$(4) \qquad Lz = 0, \quad z(0,\ x) = u_1^0(x) + \ldots + u_n^0(x).$$

Из (1) — (4) следует соотношение

$$\int_0^t \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i dt + \sum_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) v_i = \lambda z(t,\ x).$$

Оно дает информацию о поведении $u(t,\ x)$ при $t \to \infty$ при финитных $u_i^0(x) \geqslant 0$, лежит в основе доказательства существования глобального решения задачи (1) при дополнительных условиях $|f_i(u)| \leqslant C(1 + |u|^{r+\varepsilon})$, $r = 3$ при $m = 1$, $r = 2$ при $m > 1$, $\varepsilon > 0$ — достаточно мало.

6. В. В. Чепыжов «Неограниченный аттрактор квазилинейного параболического уравнения».

Рассматривается смешанная краевая задача для квазилинейного уравнения второго порядка параболического типа

$$(1) \qquad \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) + \lambda \cdot u(x, t) + f(u(x, t)),$$

$$(2) \qquad u\,|_{t=0} = u_0(x), \quad u\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, λ — положительное число, $f(u) \to 0$ при $|u| \to \infty$, $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Задаче (1), (2) соответствует нелинейная полугруппа, действующая в пространстве $H_0^1(\Omega)$: $S_t(u_0(\cdot)) = u(x, t)$, $t \geqslant 0$, $x \in \Omega$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если λ не является собственным значением оператора $-\Delta$ при нулевых граничных условиях, то полугруппа $\{S_t\}$ задачи* (1), (2) *имеет неограниченный максимальный аттрактор $\mathfrak{A}$; множество $\mathfrak{A}$ ограниченно компактно в H_0^1 и на бесконечности притягивается к конечномерной неустойчивой инвариантной плоскости, соответствующей линейной задаче* (*когда* $f(u) \equiv 0$).

Во второй теореме дается описание структуры множества $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Множество $\mathfrak{A}$ является неустойчивым многообразием $M_+(\mathfrak{R})$, выходящим из множества стационарных точек $\mathfrak{R}$ уравнения* (1).

7. Ю. Г. Рыков «О поведении носителей обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка при малых и больших значениях времени».

Рассматривается задача Коши: $u_t + A(t, x, u)_x + B(t, x, u) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $u(0, x) = u_0(x)$. Здесь $A(t, x, u)$, $B(t, x, u)$ — непрерывные функции, достаточно гладкие по x, t; $B(t, x, u)$ монотонно возрастает по u; $A_u \geqslant 0$;

$$A_u \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})); \quad B(t, x, u) + A_x(t, x, u) \geqslant 0;$$
$$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

Теорема 1 (о локализации). *Пусть* $\operatorname{supp} u_0(x) \subset [c, d]$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant \leqslant M$;

$$A_x(t, x, v) + B(t, x, v) \geqslant b_0(t)v,$$
$$b_0 \in C, \; 0 \leqslant A_v(t, x, v) \leqslant a_0(t)a(v), \quad v \in [0, M], \; a_0 \geqslant 0,$$

$a_0 \in C$, $a(v) \geqslant 0$ *непрерывна и монотонно возрастает*; $\int\limits_0^{+\infty} a_0(\tau)\, a\Big(M \times \times \exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} b_0(s) ds\Big)\Big) d\tau < +\infty$. *Тогда существует такое x^*, что* $u(t, x) \equiv 0$ *при* $x \leqslant c$, $x \geqslant x^*$.

Теорема 2 (об отсутствии локализации). *Пусть* $\operatorname{supp} u_0(x) \subset [c, d]$, $u_0 \in C$, $u_0 \geqslant 0$, $u_0(x) \not\equiv 0$; $A(t, x, v)/v \leqslant A(t, x, w)/w$, $0 < v \leqslant w$; $A_x(t, x, v) + + B(t, x, v) \leqslant b_0(t)v$, $b_0 \geqslant 0$, $b_0 \in C$; $\delta a_0(t)a(v) \leqslant A_v(t, x, v) \leqslant a_0(t)a(v)$, $0 < < \delta \leqslant 1$, $a_0 \geqslant 0$, $a \geqslant 0$, $a_0 \in C$, $a \in C^1((0, 1]) \cap C([0, 1])$; *существует такая постоянная $\sigma > 0$, что $A(t, x, v) \geqslant \sigma v A_v(t, x, v)$ для малых v*; $a(0) = 0$, $a' \geqslant 0$, $a(vw) \geqslant \chi(w)a(v)$ *при* $0 < w \leqslant 1$ *и малых* v, $\chi \in C$, $\chi \geqslant 0$, $\chi(w)$ *возрастает*; $\int\limits_0^{+\infty} a_0(\tau)\chi\Big(\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau} b_0(s) ds\Big)\Big) d\tau = +\infty$. *Тогда для любого $x^* > d$ существует такое t^*, что $u(t, x^*) > 0$ при $t > t^*$.*

Найдены также условия наличия и отсутствия таких эффектов, как конечная скорость распространения возмущений, мгновенная компактификация носителя, стабилизация за конечное время. Полученные результаты являются точными для рассматриваемого класса уравнений, что иллюстрируется примерами.