Математические заметки

том 57 выпуск 2 февраль 1995

АТТРАКТОРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ОЦЕНКИ ИХ РАЗМЕРНОСТИ

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Исследуется поведение траекторий при $t \to +\infty$ эволюционных уравнений, содержащих операторы, периодически зависящие от времени. Рассматривается задача Коши вида:

$$\partial_t u = A(u,\, t), \quad u\big|_{t=\tau} = u_\tau, \qquad t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Предполагается, что оператор $A(u,t)$ – периодически зависит от t: $A(u,t+p) = A(u,t)$ для всех u и t, p – период ($p > 0$). Большая литература посвящена вопросу существования и устойчивости периодических решений таких уравнений. Здесь мы не касаемся этих вопросов. Ниже изучаются аттракторы процессов, соответствующих (1). Напомним, что аттрактором автономного эволюционного уравнения ($A(u,t) \equiv A(u)$), или соответствующей ему полугруппы, называется компактное инвариантное (относительно этой полугруппы) и притягивающее множество (см. [1]–[3]). Под аттрактором неавтономного уравнения, или соответствующего ему процесса, подразумевается компактное притягивающее множество, обладающее свойством минимальности. Отметим, что свойство инвариантности в автономном случае заменяется в случае неавтономном свойством минимальности среди всех компактных притягивающих множеств. Одним из методов построения аттракторов неавтономных периодических эволюционных уравнений является нахождение аттракторов соответствующего семейства дискретных полугрупп. Объединение этих аттракторов является аттрактором неавтономного уравнения. Такой подход применен, например, в [4].

В настоящей статье осуществлен другой подход, основанный на изучении периодического процесса, соответствующего исследуемой задаче (1). Этот процесс $\{U(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$ является двухпараметрическим семейством операторов $U(t,\tau)$, действующих в соответствующем банаховом пространстве E, причем отображения $U(t,\tau)$ начальным условиям

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, а также гранта № MR5000 Международного научного фонда.

$u\big|_{t=\tau} = u_\tau$, $u_\tau \in E$, сопоставляют решения $u(t)$ задачи (1) в момент времени $t \geqslant \tau$: $U(t,\tau)u_\tau = u(t)$.

Изучение аттракторов с помощью непосредственного исследования периодического процесса $\{U(t,\tau)\}$ $(U(t+p,\tau+p) = U(t,\tau)$, p – период) осуществил Аро в [5], [6]. Нами применен другой метод для построения аттракторов таких процессов $\{U(t,\tau)\}$, а именно, метод сведения к соответствующей им непрерывной полугруппе, действующей в расширенном фазовом пространстве. С помощью этого метода в п. 2 весьма просто доказана теорема о существовании и о структуре аттрактора периодического процесса. При этом мы используем теорему о существовании аттракторов общих процессов, удовлетворяющих некоторым условиям. Формулировка этой теоремы приведена в п. 1. В п. 2 дается также описание характера приближения семейств траекторий к аттрактору.

В п. 3 доказаны теоремы об оценке сверху хаусдорфовой и фрактальной размерности периодического процесса.

В п. 4 рассматриваются конкретные примеры неавтономных уравнений и систем математической физики с периодическими членами, к которым применяются результаты предыдущих параграфов. В частности, найдены оценки сверху хаусдорфовой и фрактальной размерностей аттрактора для двумерной системы Навье–Стокса с периодически зависящей от времени возбуждающей силой. Даны также оценки указанных размерностей для аттрактора системы уравнений реакции-диффузии и диссипативного квазилинейного гиперболического уравнения, содержащих члены периодически зависящие от времени.

§ **1. Процессы и аттракторы.** Пусть E – банахово пространство, в котором действует некоторое двупараметрическое семейство отображений $\{U(t,\tau)\} = \{U(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$, $U(t,\tau)\colon E \to E$, $t \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Определение 1.1. Семейство операторов $\{U(t,\tau)\}$ называется *процессом* в E, если

1) $U(t,\tau) = U(t,s)U(s,\tau)$ $\forall\, t \geqslant s \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$,
2) $U(\tau,\tau) = I$ – тождественный оператор $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$.

В настоящей статье будут, в основном, исследоваться периодические процессы.

Определение 1.2. Процесс $\{U(t,\tau)\}$ называется *периодическим* с периодом p $(p > 0)$, если

$$U(t+p,\tau+p) = U(t,\tau) \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Предельное поведение процесса $\{U(t,\tau)\}$ при $t \to +\infty$ может быть описано с помощью аттрактора или равномерного аттрактора процесса. Чтобы определить эти множества введем в рассмотрение понятия притягивающего и равномерно притягивающего множества.

Определение 1.3. 1) Множество $P_0 \subseteq E$ называется *притягивающим множеством процесса* $\{U(t,\tau)\}$, если $\forall\,\tau \in \mathbb{R}$ и для любого ограниченного в E множества B, $B \subset E$,

$$\operatorname{dist}_E(U(t,\tau)B, P_0) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

2) Множество $P_1 \subseteq E$ называется *равномерно* (по $\tau \in \mathbb{R}$) *притягивающим* для процесса $\{U(t,\tau)\}$, если $\forall\,\tau \in \mathbb{R}$ и для любого ограниченного в E множества B, $B \subset E$,

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \operatorname{dist}_E(U(T+\tau,\tau)B, P_1) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to +\infty.$$

Здесь, как обычно,

$$\operatorname{dist}_E(X,Y) = \sup_{x \in X} \operatorname{dist}_E(x,Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x-y\|_E.$$

Процесс $\{U(t,\tau)\}$ называется *асимптотически* (*равномерно асимптотически*) *компактным*, если для него существует компактное притягивающее (равномерно притягивающее) множество P, $P \Subset E$.

Определение 1.4. 1) Замкнутое множество $\mathscr{A}_0 \subseteq E$ называется *аттрактором процесса* $\{U(t,\tau)\}$, если оно является его минимальным замкнутым притягивающим множеством. Минимальность понимается в том смысле, что любое замкнутое притягивающее множество содержит в себе $\mathscr{A}_0$.

2) Замкнутое множество $\mathscr{A}_1 \subseteq E$ называется равномерным (по $\tau \in \mathbb{R}$) аттрактором процесса $\{U(t,\tau)\}$, если оно является минимальным замкнутым равномерно (по $\tau \in \mathbb{R}$) притягивающим множеством этого процесса.

Понятие аттрактора и равномерного аттрактора процесса введено в работе [5]. Там же приведен пример процесса, для которого равномерный аттрактор шире (неравномерного) аттрактора. Вместе с тем, как будет показано ниже, для периодических процессов при выполнении некоторых общих условий эти аттракторы совпадают.

При исследовании периодических процессов мы будем использовать результаты работы [7], в которой изучались аттракторы более общих процессов и семейств процессов. Для полноты изложения мы кратко сформулируем основные утверждения этой работы, которые нам понадобятся.

Рассматривается семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, зависящее от некоторого функционального параметра σ, который будет называться символом соответствующего процесса $\{U_\sigma(t,\tau)\}$. Предполагается, что $\sigma \in \Sigma$, где Σ – полное метрическое пространство. Множество Σ называется пространством символов.

Аналогично определениям 1.3 и 1.4 вводится понятие равномерно (по $\sigma \in \Sigma$) притягивающего множество и равномерного (по $\sigma \in \Sigma$) аттрактора семейства процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$.

Определение 1.5. 1) Множество $P_\Sigma \subseteq E$ называется *равномерно* (по $\sigma \in \Sigma$) *притягивающим* для семейства процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \Sigma$, если $\forall\, \tau \in \mathbb{R}$ и для любого ограниченного в E множества B, $B \subset E$,

$$\sup_{\sigma\in\Sigma} \operatorname{dist}_E(U_\sigma(t,\tau)B, P_\Sigma) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

2) Замкнутое множество $\mathscr{A}_\Sigma \subseteq E$ называется *равномерным* (по $\sigma \in \Sigma$) *аттрактором* семейства процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \Sigma$, если оно является минимальным замкнутым равномерно (по $\sigma \in \Sigma$) притягивающим множеством.

Семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \Sigma$, называется *равномерно* (по $\sigma \in \Sigma$) *асимптотически компактным*, если для него существует компактное равномерно (по $\sigma \in \Sigma$) притягивающее множество.

Как показано в работах [5], [7] равномерно асимптотически компактное семейство процессов обладает равномерным аттрактором. Изучим структуру равномерного аттрактора при некоторых дополнительных ограничениях.

Предположим, что на пространстве символов Σ действует некоторая строго инвариантная полугруппа $\{T(t)\} = \{T(t), t \geqslant 0\}$, $T(t)\colon \Sigma \to \Sigma$, $T(t)\Sigma = \Sigma\ \forall\, t \geqslant 0$. Пусть семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \Sigma$, связано с полугруппой $\{T(t)\}$ следующим тождеством сдвига:

$$U_\sigma(t+s,\tau+s) = U_{T(s)\sigma}(t,\tau) \quad \forall\, \sigma \in \Sigma, \quad t \geqslant \tau, \quad t,\tau \in \mathbb{R}, \quad s \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Рассмотрим теперь следующее семейство отображений $\{S(t), t \geqslant 0\}$, действующих в расширенном фазовом пространстве $E \times \Sigma$ по формуле:

$$S(t)(u,\sigma) = (U_\sigma(t,0)u, T(t)\sigma), \qquad t \geqslant 0, \quad (u,\sigma) \in E \times \Sigma. \tag{1.2}$$

С помощью (1.1) легко проверяется, что $\{S(t)\}$ – есть полугруппа в $E \times \Sigma$, т.е. $S(t_1)S(t_2) = S(t_1+t_2)\ \forall\, t_1, t_2 \geqslant 0$ и $S(0) = I$ – тождественный оператор (см. [7], [8]). Как мы сейчас увидим имеется прямая связь между аттрактором полугруппы $\{S(t)\}$ и равномерным аттрактором семейства процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \Sigma$.

Определение 1.6. Семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \Sigma$, называется $(E \times \Sigma, E)$-*непрерывным*, если для любых фиксированных t и τ, $t \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, отображение $(u,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,\tau)u$ непрерывно из $E \times \Sigma$ в E.

При описании структуры равномерных аттракторов удобно пользоваться понятием полной траектории процесса и ядра процесса.

Определение 1.7. Кривая $u(s) \in E$, $s \in \mathbb{R}$, называется *полной траекторией процесса* $\{U(t,\tau)\}$, если

$$U(t,\tau)u(\tau) = u(t) \qquad \forall\, t \geqslant \tau; \quad t,\tau \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Определение 1.8. *Ядро* $\mathscr{K}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ состоит из всех его ограниченных полных траекторий:

$$\mathscr{K} = \bigl\{u(\cdot) : u(t),\ t \in \mathbb{R},\ u(\cdot) - \text{полная траектория} \\ \text{процесса } \{U(t,\tau)\} \text{ и } \|u(t)\|_E \leqslant C_u\ \forall\, t \in \mathbb{R}\bigr\}.$$

Множество $\mathscr{K}(s) = \{u(s) : u(\cdot) \in \mathscr{K}\}$ значений полных траекторий $u(s)$ при $t = s$ называется *сечением ядра* $\mathscr{K}$ этого процесса в момент времени $t = s$. Очевидно, $\mathscr{K}(s) \subseteq E$.

Наконец, рассмотрим два проектора из $E \times \Sigma$ на E и Σ:

$$\Pi_1 : E \times \Sigma \mapsto E, \quad \Pi_2 : E \times \Sigma \mapsto \Sigma, \qquad \Pi_1(u,\sigma) = u, \quad \Pi_2(u,\sigma) = \sigma.$$

Сформулируем основную теорему о равномерном аттракторе семейства процессов.

Теорема 1.1. *Пусть семейство процессов* $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$, *действующее в банаховом пространстве* E *является равномерно* (*по* $\sigma \in \Sigma$) *асимптотически компактным и* $(E \times \Sigma, E)$-*непрерывным. Пусть также* Σ – *компактное метрическое пространство, на котором действует непрерывная, строго инвариантная полугруппа* $\{T(t)\}$ $(T(t)\Sigma = \Sigma)$, *удовлетворяющая тождеству сдвига* (1.1). *Тогда полугруппа* $\{S(t)\}$, *действующая в* $E \times \Sigma$ *по формуле* (1.2) *обладает компактным в* $E \times \Sigma$ *аттрактором* $\mathscr{A}$, $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}\ \forall\, t \geqslant 0$. *Кроме того*:

1) $\Pi_1 \mathscr{A} = \mathscr{A}_\Sigma$ *является равномерным аттрактором семейства процессов* $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$;
2) $\Pi_2 \mathscr{A} = \Sigma$;
3) $\mathscr{A}_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{K}_\sigma(0)$, *где* $\mathscr{K}_\sigma$ – *ядро процесса* $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ *с символом* $\sigma \in \Sigma$.

Отметим, что в 3) $\mathscr{K}_\sigma(0)$ можно заменить на $\mathscr{K}_\sigma(t)$, где t – любое фиксированное число $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.1 доказана в [7]. В доказательстве используется общая теорема об аттракторах полугрупп (см. [1]–[3]), примененная к полугруппе (1.2). В работах [7]–[9] приведено большое количество примеров неавтономных динамических систем, для которых устанавливается существование равномерного аттрактора на основании теоремы 1.1.

В следующем параграфе теорема 1.1 применяется для исследования аттракторов периодических процессов.

§ 2. О структуре аттрактора периодического процесса. В настоящем параграфе исследуется аттрактор периодического процесса. Пусть $\{U(t,\tau)\}$ – периодический процесс, действующий в банаховом пространстве E, p – его период $(U(t+p,\tau+p) = U(t,\tau)\ \forall\, t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R})$. Построим семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathbb{T}^1$, в котором пространством символов Σ служит окружность $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} \pmod p$ длины p. По определению положим:

$$U_\sigma(t,\tau) = U(t+\sigma, \tau+\sigma).$$

Легко видеть, что существование равномерного (по $\sigma \in \mathbb{T}^1$) притягивающего множества для введенного выше семейства процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathbb{T}^1$, эквивалентно существованию равномерного (по $\tau \in \mathbb{R}$) притягивающего множества для исходного периодического процесса $\{U(t,\tau)\}$. Отметим,что в силу периодичности равномерное притяжение по $\tau \in \mathbb{R}$ эквивалентно равномерному притяжению по $\tau \in [0,p)$:

$$\sup_{\tau\in[0,p)} \operatorname{dist}_E(U(T+\tau,\tau)B, P_1) \to 0 \qquad (T \to +\infty).$$

Очевидно также, что если периодический процесс $\{U(t,\tau)\}$ имеет (неравномерно) притягивающее множество P_0, то оно одновременно является равномерно притягивающим, если дополнительно известно, что процесс $\{U(t,\tau)\}$ ограничен. Процесс $\{U(t,\tau)\}$ называется ограниченным, если для любого ограниченного в E множества B найдется ограниченное множество $B_1 = B_1(B)$, такое, что $U(t,\tau)B \subseteq B_1\ \forall\, t \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Эти утверждения непосредственно следуют из приведенных определений.

На пространстве символов $\mathbb{T}^1$ действует группа $\{T(t)\}$ поворотов окружности: $T(t)\sigma = \sigma + t \pmod p$. Тождество сдвига (1.1), очевидно, выполнено для семейства периодических процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathbb{T}^1$, так как

$$\begin{aligned} U_\sigma(t+s,\tau+s) &= U(t+s+\sigma, \tau+s+\sigma) \\ &= U\bigl(t+(s+\sigma) \pmod p,\ \tau+(s+\sigma) \pmod p\bigr) \\ &= U\bigl(t+T(s)\sigma, \tau+T(s)\sigma\bigr) = U_{T(s)\sigma}(t,\tau). \end{aligned}$$

Следовательно, формула (1.2) порождает полугруппу $\{S(t)\}$, действующую в пространстве $E \times \mathbb{T}^1$:

$$S(t)(u,\sigma) = \bigl(U(t+\sigma,\sigma)u, (t+\sigma) \pmod p\bigr), \quad t \geqslant 0,\ (u,\sigma) \in E \times \mathbb{T}^1. \tag{2.1}$$

Применительно к периодическому процессу $\{U(t,\tau)\}$ свойство $(E\times\mathbb{T}^1, E)$ – непрерывности означает, что сходимость

$$u_n \to u\ (n \to +\infty) \text{ в } E \quad \text{и} \quad \sigma_n \to \sigma\ (n \to +\infty) \text{ в } \mathbb{R}$$

влечет сходимость

$$U_{\sigma_n}(t,\tau)u_n = U(t+\sigma_n, \tau+\sigma_n)u_n \to U(t,\tau)u\ (n \to +\infty) \text{ в } E.$$

Отметим также, что любая полная траектория $u(t)$ процесса $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ после замены $\tilde{u}(t) = u(t-\sigma)$ становится полной траекторией процесса $\{U(t,\tau)\}$.

Сформулируем теорему об аттракторе периодического процесса.

Теорема 2.1. *Пусть $\{U(t,\tau)\}$ – периодический, равномерно (по $\tau \in \mathbb{R}$) асимптотически компактный и $(E \times \mathbb{T}^1, E)$-непрерывный процесс. Тогда*:

1) *полугруппа $\{S(t)\}$ (см. (2.1)), действующая в $E \times \mathbb{T}^1$, имеет компактный аттрактор $\mathscr{A}$, $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}\ \forall\, t \geqslant 0$. При этом $\Pi_1\mathscr{A} = \mathscr{A}_1$ есть равномерный (по $\tau \in \mathbb{R}$) аттрактор процесса $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ и*

$$\mathscr{A}_1 = \bigcup_{\sigma \in [0,p)} \mathscr{K}(\sigma), \tag{2.2}$$

где $\mathscr{K}(\sigma)$ – сечение в момент $t = \sigma$ ядра $\mathscr{K}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$.

2) *(неравномерный) аттрактор $\mathscr{A}_0$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ совпадает с равномерным аттрактором $\mathscr{A}_1$: $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0$.*

Замечание. Отметим, что для периодических процессов $\{U(t,\tau)\}$ (неравномерный) аттрактор $\mathscr{A}_0$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ является равномерным аттрактором $\mathscr{A}_1$. Для более общих процессов, например, для процессов с почти периодическими символами, это вообще говоря не верно (см. [6]). Существование аттрактора $\mathscr{A}_0$ для произвольного асимптотически компактного процесса доказано, например, в [7].

Доказательство. Все утверждения теоремы 2.1 кроме последнего следуют из теоремы 1.1 и сделанных выше замечаний о периодических процессах. Докажем совпадение равномерного и (неравномерного) аттрактора: $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_1$. Очевидно, что $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}_1$. Проверим обратное включение, т.е. докажем, что $\mathscr{A}_0 \supseteq \mathscr{A}_1$.

Пусть $u \in \mathscr{A}_1$. Тогда в силу представления (2.2) найдется полная ограниченная траектория $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, процесса $\{U(t,\tau)\}$ такая, что $u = u(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in [0,p)$. Рассмотрим множество $B = \{u(\sigma - np),\ n \in \mathbb{Z}\}$. Множество B ограничено в силу ограниченности полной траектории, поэтому в силу свойства притяжения к (неравномерному) аттрактору $\mathscr{A}_0$

$$\operatorname{dist}_E\bigl(U(t,\tau)B, \mathscr{A}_0\bigr) \to 0 \qquad (t \to +\infty).$$

В частности,

$$\operatorname{dist}_E\bigl(U(np+\sigma,\sigma)u(\sigma - np), \mathscr{A}_0\bigr) \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

Однако в силу периодичности процесса

$$U(np+\sigma,\sigma)u(\sigma - np) = U(\sigma, \sigma - np)u(\sigma - np) = u(\sigma) = u.$$

Мы воспользовались здесь свойством (1.3) полной траектории. Следовательно, $\operatorname{dist}_E(u, \mathscr{A}_0) = 0$, т.е. $u \in \mathscr{A}_0$, поскольку множество $\mathscr{A}_0$ замкнуто в E. Тем самым $\mathscr{A}_0 \supseteq \mathscr{A}_1$. Теорема доказана.

Займемся более детальным изучением свойств сечений ядра $\mathscr{K}(t), t \in \mathbb{R}$, периодического процесса $\{U(t,\tau)\}$, удовлетворяющего условиям теоремы 2.1. Прежде всего отметим, что если $u(\cdot) \in \mathscr{K}$, то $u_p(\cdot) \in \mathscr{K}$, где $u_p(t) = u(t+p)$. Следовательно,

$$\mathscr{K}(t+p) = \mathscr{K}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Очевидно также, что выполнено следующее утверждение.

Предложение 2.1.

$$U(t,\tau)\mathscr{K}(\tau) = \mathscr{K}(t), \qquad t \geqslant \tau, \quad t,\tau \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) непосредственно вытекает из определения ядра процесса и выполнено для любого процесса.

Ниже мы покажем, что аттрактор $\mathscr{A}_0$ периодического процесса $\{U(t,\tau)\}$ можно получить также другим способом, а именно с помощью аттракторов порождаемого им семейства дискретных полугрупп. Действительно, рассмотрим следующее семейство отображений:

$$S_n(\delta) = U(\delta + np, \delta), \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \delta \in \mathbb{T}^1, \tag{2.5}$$

зависящее от параметра δ, $S_n(\delta)\colon E \mapsto E$. При каждом $\delta \in \mathbb{T}^1$ операторы $\{S_n(\delta),\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ образуют дискретную полугруппу относительно $n \in \mathbb{Z}_+$. В самом деле:

$$\begin{aligned} S_n(\delta) &= U(np+\delta,\delta) \\ &= U(np+\delta,(n-1)p+\delta)U((n-1)p+\delta,(n-2)p+\delta)\dots U(p+\delta,\delta) \\ &= \big(U(p+\delta,\delta)\big)^n = \big(S_1(\delta)\big)^n. \end{aligned}$$

Предложение 2.2. *При выполнении условий теоремы* 2.1 *сечение ядра* $\mathscr{K}(\delta)$ *является аттрактором дискретной полугруппы* $\{S_n(\delta),$ $n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Доказательство. Заметим, что каждое отображение $S_n(\delta)$ в силу (2.5) непрерывно. Процесс $\{U(t,\tau)\}$ асимптотически компактен, поэтому полугруппа $\{S_n(\delta)\}$ также асимптотически компактна (т.е. имеет компактное притягивающее множество). В силу известной теоремы об аттракторе непрерывной асимптотически компактной полугруппы, каждая полугруппа $\{S_n(\delta)\}$ имеет аттрактор, который мы обозначим $\mathscr{A}(\delta)$:

$$S_n(\delta)\mathscr{A}(\delta) = \mathscr{A}(\delta) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathscr{A}(\delta) \Subset E. \tag{2.6}$$

Однако, в силу (2.4) и (2.3)

$$S_n(\delta)\mathscr{K}(\delta) = U(np+\delta,\delta)\mathscr{K}(\delta) = \mathscr{K}(np+\delta) = \mathscr{K}(\delta),$$

т.е. $\mathscr{K}(\delta)$ – ограниченное инвариантное относительно $\{S_n(\delta)\}$ множество. Поэтому, в силу свойства притяжения к аттрактору $\mathscr{K}(\delta) \subseteq \mathscr{A}(\delta)$ $\forall\,\delta \in \mathbb{T}^1$. Проверим обратное включение. Пусть $u_\delta \in \mathscr{A}(\delta)$. Построим ограниченную полную траекторию $u(t), t \in \mathbb{R}$, процесса $\{U(t,\tau)\}$, для которой $u(\delta) = u_\delta$. Прежде всего положим $u(t) = U(t,\delta)u_\delta$ при $t \geqslant \delta$. Проверим (1.3) при $\tau \geqslant \delta$, $t \geqslant \delta$:

$$U(t,\tau)u(\tau) = U(t,\tau)U(\tau,\delta)u_\delta = U(t,\delta)u_\delta = u(t).$$

Осталось доопределить $u(t)$ при $t < \delta$. В силу (2.6) уравнение

$$S_1(\delta)u_{\delta-1} = u_\delta$$

относительно $u_{\delta-1}$ имеет решение $u_{\delta-1} \in \mathscr{A}(\delta)$. Положим $u(\delta - p) = u_{\delta-1}$ и продолжим кривую $u(t)$ при $\delta - p \leqslant t < \delta$ формулой:

$$u(t) = U(t, \delta - p)u_{\delta-1}.$$

Очевидно, что (1.3) уже имеет место при $\tau \geqslant \delta - p$. Аналогично строится элемент $u_{\delta-2} \in \mathscr{A}(\delta)$ и $u(t)$ продолжается на интервал $[\delta - 2p, \delta - p)$. Повторяя этот процесс до бесконечности, получим полную траекторию $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, процесса $\{U(t,\tau)\}$. При этом будем иметь:

$$u(\delta + np) \in \mathscr{A}(\delta) \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что траектория $u(t)$ ограничена. Множество $\mathscr{A}(\delta)$ ограничено, поэтому в силу свойства асимптотической компактности процесса $\{U(t,\tau)\}$ найдется такое число $T \geqslant \delta$, что при $t \geqslant T$

$$U(t,\delta)\mathscr{A}(\delta) \subseteq B_1,$$

где B_1 – некоторое ограниченное множество. Например, $B_1 = \mathscr{O}_\varepsilon(P_1)$, где P_1 – компактное притягивающее множество процесса $\{U(t,\tau)\}$, $\varepsilon > 0$. В частности,

$$\begin{aligned} u(t+np) &= U(t+np, \delta+np)u(\delta+np) \\ &= U(t,\delta)u(\delta+np) \subseteq B_1 \qquad \forall\, t \geqslant T, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Следовательно, $u(t_1) \in B_1$ $\forall\, t_1 \in \mathbb{R}$, т.е. траектория $u(t_1)$ ограничена. Поэтому, $u(\delta) \in \mathscr{K}(\delta)$. Тем самым, $\mathscr{A}(\delta) \subseteq \mathscr{K}(\delta)$. Мы доказали тождество $\mathscr{A}(\delta) = \mathscr{K}(\delta)$.

В заключение установим некоторые свойства сечений $\mathscr{K}(\delta)$ при условии, что периодический процесс $\{U(t,\tau)\}$ при каждом фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$ непрерывен как отображение $(u,t) \mapsto U(t,\tau)u$ по совокупности аргументов $u \in E$ и $t \geqslant \tau$. (Это условие не совпадает с $(E \times \mathbb{T}^1, E)$-непрерывностью процесса.)

Теорема 2.2. *Пусть периодический процесс* $\{U(t,\tau)\}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1 *и непрерывен по* $u \in E$ *и* $t \geqslant \tau$ *при каждом фиксированном* $\tau \in \mathbb{R}$. *Тогда*

1) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что если* $|t-s| \leqslant \delta$, *то*

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{K}(t), \mathscr{K}(s)) \leqslant \varepsilon; \tag{2.7}$$

2) *для любого ограниченного в* E *множества* B

$$\operatorname{dist}_E(U(t,\tau)B, \mathscr{K}(t)) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +\infty. \tag{2.8}$$

Доказательство. Заметим, что в силу (2.3) достаточно проверить (2.7) для $s, t \in \mathbb{T}^1$. Рассмотрим отображение $(u,t) \mapsto U(t,\tau)u$ на компактном множестве $\mathscr{K}(0) \times \mathbb{T}^1$ из пространства $E \times \mathbb{T}^1$. Непрерывная на компакте функция является равномерно непрерывной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что если $|t-s| \leqslant \delta$, то для всех $x \in \mathscr{K}(0)$

$$\|U(t,0)x - U(s,0)x\|_E \leqslant \varepsilon. \tag{2.9}$$

В силу предложения 2.1 $U(t,0)x \in \mathscr{K}(t)$, $U(s,0)x \in \mathscr{K}(s)$. При этом, для любого $y \in \mathscr{K}(t)$ найдется $x \in \mathscr{K}(0)$, что $U(t,0)x = y$. Но тогда в силу (2.9)

$$\operatorname{dist}_E(y, \mathscr{K}(s)) \leqslant \operatorname{dist}_E(y, U(s,0)x) = \|U(t,0)x - U(s,0)x\|_E \leqslant \varepsilon.$$

А значит и $\operatorname{dist}_E(\mathscr{K}(t), \mathscr{K}(s)) \leqslant \varepsilon$ при всех t, s таких, что $|t-s| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Свойство (2.7) доказано.

Установим свойство (2.8). В силу периодичности процесса достаточно проверить его для $\tau = 0$. Докажем это методом от противного. Если утверждение неверно, то для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется ограниченное множество B из E, найдется последовательность точек $\{x_n\} \subset B$, а также последовательность чисел $t_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ такие, что

$$\operatorname{dist}_E\bigl(U(t_n,0)x_n, \mathscr{K}(t_n)\bigr) \geqslant \varepsilon. \tag{2.10}$$

Представим число t_n в виде $t_n = k_n p + \delta_n$, где $\delta_n \in [0,p)$. Переходя к подпоследовательности можно считать, что $\delta_n \to \delta$ $(n \to +\infty)$, где $\delta \in [0,p]$. Отметим, что

$$\begin{aligned} U(t_n,0)x_n &= U(k_n p + \delta_n, 0)x_n \\ &= U(k_n p + \delta_n, k_n p)U(k_n p, 0)x_n \\ &= U(\delta_n, 0)S_{k_n}(0)x_n. \end{aligned}$$

Поскольку, в силу предложения 2.2, сечение $\mathscr{K}(0)$ является аттрактором дискретной полугруппы $\{S_n(0)\}$, то можно считать, что $y_n = S_{k_n}(0)x_n \to y$ $(n \to +\infty)$, где $y \in \mathscr{K}(0)$. Таким образом, в силу (2.10)

$$\operatorname{dist}_E\big(U(\delta_n, 0)y_n, \mathscr{K}(\delta_n)\big) \geqslant \varepsilon, \tag{2.11}$$

и при этом $y_n \to y$ $(n \to +\infty)$, $y \in \mathscr{K}(0)$.

В силу непрерывности отображения $(u,t) \mapsto U(t,\tau)u$ по u и t имеем: $U(\delta_n, 0)y_n \mapsto U(\delta, 0)y$ $(n \to +\infty)$. Но тогда, в соответствии с (2.11), если n достаточно велико, то

$$\operatorname{dist}_E\big(U(\delta, 0)y, \mathscr{K}(\delta_n)\big) \geqslant \varepsilon/2.$$

Как было установлено, $y \in \mathscr{K}(0)$, поэтому $U(\delta,0)y \in \mathscr{K}(\delta)$ и мы имеем:

$$\operatorname{dist}_E\big(\mathscr{K}(\delta), \mathscr{K}(\delta_n)\big) \geqslant \operatorname{dist}_E\big(U(\delta, 0)y, \mathscr{K}(\delta_n)\big) \geqslant \varepsilon/2,$$

то есть

$$\operatorname{dist}_E\big(\mathscr{K}(\delta), \mathscr{K}(\delta_n)\big) \geqslant \varepsilon/2, \qquad \delta_n \to \delta \quad (n \to +\infty).$$

Однако, это противоречит уже (2.7). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Легко аналогично показать, что в (2.8) можно взять sup по $\tau \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}_E\big(U(\tau+T, \tau)B, \mathscr{K}(\tau+T)\big) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to +\infty,$$

что в каком-то смысле уточняет характер стремления к аттрактору периодического процесса.

Определение 2.1. Процесс $\{U(t,\tau)\}$ удовлетворяет *свойству единственности обратной задачи*, если равенство $U(t,\tau)u_1 = U(t,\tau)u_2$ всегда влечет за собой $u_1 = u_2$.

Предложение 2.3. *В предположении теоремы* 2.1, *если процесс* $\{U(t,\tau)\}$ *удовлетворяет свойству единственности обратной задачи, то отображение* $U(t,\tau)\colon \mathscr{K}(\tau) \mapsto \mathscr{K}(t)$ *есть гомеоморфизм.*

Этот факт очевидным образом следует из предложения 2.1.

§ 3. Оценки сверху размерности аттракторов периодических процессов. Пусть X – компактное множество в E. Напомним основные определения метрической теории размерности. Через $B_r(x)$ обозначается шар в E с центром в x и радиусом r. Пусть $d \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$. Положим

$$\mu_H(X, d, \varepsilon) = \inf \sum_i r_i^d,$$

где inf берется по всевозможным покрытиям множества X шарами $B_{r_i}(x_i)$ радиуса $r_i \leqslant \varepsilon$. Очевидно, что $\mu_H(X,d,\varepsilon)$ не возрастает по ε. Обозначим

$$\mu_H(X,d) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_H(X,d,\varepsilon) = \sup_{\varepsilon>0} \mu_H(X,d,\varepsilon).$$

Величина $\mu_H(X,d)$ называется d-мерной мерой Хаусдорфа множества X. Хаусдорфовой размерностью множества X в E называют число

$$d_H(X) = \inf\bigl\{d : \mu_H(X,d) = 0\bigr\}.$$

Аналогично определяется фрактальная размерность множества X. Пусть $N(\varepsilon, X)$ – минимальное число шаров радиуса ε, которыми можно покрыть множество X. Фрактальной мерой X размерности d называют величину

$$\mu_F(X,d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^d N(\varepsilon,X) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \mu_F(X,d,\varepsilon).$$

Фрактальной размерностью множества X в E называют число

$$d_F(X) = \inf\bigl\{d : \mu_H(X,d) = 0\bigr\}.$$

Ясно, что всегда $\mu_H(X,d) \leqslant \mu_F(X,d)$ и $d_H(X) \leqslant d_F(X)$.

Отметим, что в определении хаусдорфовой и фрактальной размерности можно рассматривать покрытия множества X шарами, центры которых принадлежат X. При таком определении величина размерности не меняется (хотя соответствующая мера может измениться). Мы будем рассматривать только такие покрытия.

Пусть K_0 – компакт в E. Рассмотрим некоторое отображение $\Phi\colon K_0 \times [0,T] \to E$ такое, что $\forall\, x \in K_0 \Phi(x,0) = x$. Будем предполагать, что отображение Φ липшицево по x и по t, т.е. $\forall\, x_1, x_2 \in K_0$, $\forall\, t \in [0,T]$

$$\|\Phi(x_1,t_1) - \Phi(x_2,t_2)\|_E \leqslant k\bigl(\|x_1 - x_2\|_E + |t_1 - t_2|\bigr). \tag{3.1}$$

Предложение 3.1. *Пусть* $K_t = \Phi(K_0,t)$, $t \in [0,T]$, *тогда*

$$d_F(K_t) \leqslant d_F(K_0), \tag{3.2}$$

$$d_H(K_t) \leqslant d_H(K_0). \tag{3.3}$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем ε-покрытие

$$B_\varepsilon(x_1), \dots, B_\varepsilon(x_N)$$

множества K_0, $x_i \in K_0$, $K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon(x_i)$. Тогда

$$K_t \subseteq \bigcup_{i=1}^N \Phi\bigl(B_\varepsilon(x_i),t\bigr) \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_{\varepsilon k}(\Phi(x_i,t))$$

(мы воспользовались свойством (3.1) отображения Φ). Следовательно, $\mu_F(K_t,d,\varepsilon k) \leqslant k^d \mu_F(K_0,d,\varepsilon)$. Тем самым $\mu_F(K_t,d) \leqslant k^d \mu_F(K_0,d)$, и (3.2) доказано. Аналогично доказывается (3.3).

Предложение 3.2. *Пусть* $\Xi = \bigcup_{t\in[0,T]} \Phi(K_0, t)$. *Тогда*

$$d_F(\Xi) \leqslant d_F(K_0) + 1, \tag{3.4}$$

$$d_H(\Xi) \leqslant d_H(K_0) + 1. \tag{3.5}$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем покрытие множества K_0 шарами радиуса $\varepsilon/(2k)$ с центрами в точках $x_1, x_2, \dots, x_N$. Тогда для любого $t \in [0,T]$ шары $B_{\varepsilon/2}(\Phi(x_1,t)), \dots, B_{\varepsilon/2}(\Phi(x_N,t))$ покрывают множество $K_t = \Phi(K_0,t)$ (в силу липшицевости отображения Φ). Разбиваем отрезок $[0,T]$ на $(n+1)$ интервалов длины меньше $\varepsilon/(2k)$. Всего внутренних точек разбиения интервала будет $n \leqslant (2Tk)/\varepsilon$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = T$, где $0 < t_{i+1} - t_i \leqslant \varepsilon/(2k)$. Рассмотрим семейство шаров $\{B_\varepsilon(\Phi(x_j,t_i)),\ j = 1,\dots,N,\ i = 1,\dots,n\}$. Это семейство покрывает множество Ξ. Действительно: $\forall\, \Phi(x,t)\ \exists\, x_j$: $\|\Phi(x,t) - \Phi(x_j,t)\|_E < \varepsilon/2$ и $\exists\, t_i$: $|t - t_i| \leqslant \varepsilon/(2k)$ $(i = 1,\dots,n)$,

$$\begin{aligned}\|\Phi(x,t) - \Phi(x_j,t_i)\| &\leqslant \|\Phi(x,t) - \Phi(x_j,t)\| + \|\Phi(x_j,t) - \Phi(x_j,t_i)\| \\ &< \varepsilon/2 + k\varepsilon/(2k) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x,t) \in B_\varepsilon(\Phi(x_j,t_i))$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mu_F(\Xi, d+1, \varepsilon) &\leqslant nN\varepsilon^{d+1} \leqslant \frac{2Tk}{\varepsilon} N \left(\frac{\varepsilon}{2k}\right)^{d+1} (2k)^{d+1} \\ &= 2TkN\varepsilon^d = 2Tk(2k)^d N \left(\frac{\varepsilon}{2k}\right)^d,\end{aligned}$$

т.е. $\mu_F(\Xi, d+1, \varepsilon) \leqslant T(2k)^{d+1}\mu_F(K_0, d, \varepsilon/(2k))$, таким образом $\mu_F(\Xi, d+1) \leqslant T(2k)^{d+1}\mu_F(K_0, d)$, а значит и $d_F(\Xi) \leqslant d_F(K_0) + 1$. Оценка (3.4) доказана.

Для доказательства оценки (3.5) покроем K_0 шарами разных радиусов: $\{B_{\varepsilon_j}(x_j)\}$, где $\varepsilon_j \leqslant \varepsilon/(2k)$. Затем, для каждой фиксированной точки x_j отрезок $[0,T]$ разбиваем на отрезки длины $\tau_j \leqslant \varepsilon_j/(2k)$ точками $0 = t_0^j < t_1^j < \dots < t_{n_j+1}^j = T$. Число внутренних точек разбиения $n_j \leqslant \frac{2Tk}{\varepsilon_j}$. Семейство шаров

$$\left\{B_{2k\varepsilon_j}(\Phi(x_j, t_i^j) : j = 1,\dots,N,\ i = 1,\dots,n_j\right\}$$

покрывает множество Ξ. Оценим сверху величину $\mu_H(\Xi, d+1, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned}\mu_H(\Xi, d+1, \varepsilon) &\leqslant \sum_j \sum_{i=1}^{n_j} (\varepsilon_j)^{d+1} \leqslant \sum_j \frac{2Tk}{\varepsilon_j} (\varepsilon_j)^{d+1} \\ &= 2kT \sum_j (\varepsilon_j)^d = (2k)^{d+1} T \sum_j \left(\frac{\varepsilon_j}{2k}\right)^{d+1},\end{aligned}$$

т.е.

$$\mu_H(\Xi, d+1, \varepsilon) \leqslant (2k)^{d+1} T \sum_j \left(\frac{\varepsilon_j}{2k}\right)^d,$$

и, тем самым,

$$\mu_H(\Xi, d+1, \varepsilon) \leqslant (2k)^{d+1} T \mu_H(K_0, d, \varepsilon/(2k)),$$

что влечет за собой

$$\mu_H(\Xi, d+1) \leqslant (2k)^{d+1} T \mu_H(K_0, d) \quad \text{и} \quad d_H(\Xi) \leqslant d_H(K_0) + 1.$$

Предложение доказано.

Применим полученные утверждения к изучаемому периодическому процессу $\{U(t,\tau)\}$.

Теорема 3.1. *Пусть периодический процесс* $\{U(t,\tau)\}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1 *и при каждом* $T > 0$ *отображение* $(u,t) \mapsto U(t,\tau)u$ *из* $\mathscr{K}(0) \times [\tau, \tau+T]$ *в* E *удовлетворяет условиям Липшица*:

$$\|U(t_1,\tau)u_1 - U(t_2,\tau)u_2\|_E \leqslant C(T)\big(\|u_1 - u_2\|_E + |t_1 - t_2|\big). \tag{3.6}$$

Тогда

1) $d_F(\mathscr{K}(t)) = d_F(\mathscr{K}(0))$, $d_H(\mathscr{K}(t)) = d_H(\mathscr{K}(0))$ *для всех* $t \in [0,T]$, *где* $\mathscr{K}$ – *ядро процесса* $\{U(t,\tau)\}$;
2) $d_F(\mathscr{A}_0) = d_F(\mathscr{K}(0)) + 1$, $d_H(\mathscr{A}_0) \leqslant d_H(\mathscr{K}(0)) + 1$, *где* $\mathscr{A}_0$ – *аттрактор периодического процесса* $\{U(t,\tau)\}$.

Доказательство. Напомним, что $\mathscr{K}(t+p) = \mathscr{K}(t)$ (см. (2.3)). В силу предложения 2.1 $U(t,0)\mathscr{K}(0) = \mathscr{K}(t)$. Поэтому из предложения 3.1 следует, что $d_F(\mathscr{K}(t)) \leqslant d_F(\mathscr{K}(0))$. Вместе с тем $U(np,t)\mathscr{K}(t) = \mathscr{K}(np) = \mathscr{K}(0)$ при $np > t$, поэтому $d_F(\mathscr{K}(t)) \geqslant d_F(\mathscr{K}(0))$, т.е. $d_F(\mathscr{K}(t)) = d_F(\mathscr{K}(0))$. Аналогичное равенство имеет место для хаусдорфовой размерности. Пункт 2) непосредственно следует из предложения 3.2.

Таким образом, конечномерность аттрактора периодического процесса $\{U(t,\tau)\}$ следует из конечномерности сечения его ядра или (в силу предложения 2.2) из конечномерности аттрактора дискретной полугруппы $\{S_n(0)\}$.

§ **4. Приложения к неавтономным динамическим системам.** В настоящем параграфе будут получены результаты о структуре аттракторов ряда уравнений и систем математической физики, содержащих члены, периодически зависящие от времени. Будут рассмотрены неавтономные уравнения вида:

$$\partial_t u = A(u,t), \quad u\big|_{t=\tau} = u_\tau, \qquad t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

где при каждом $t \in \mathbb{R}$ оператор $A(u,t)$ есть некоторый нелинейный оператор $A(\cdot,t)\colon E_1 \mapsto E_0$, E_1 и E_0 – банаховы пространства. Обычно, $E_1 \subseteq E_0$. Предполагается, что оператор $A(\cdot,t)$ периодически зависит от t с периодом p: $A(\cdot,t+p) = A(\cdot,t)$. Начальные условия u_τ задачи (4.1) принадлежат банахову пространству E $(E_1 \subseteq E \subseteq E_0)$. Предполагается, что при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и всех $u_\tau \in E$ задача (4.1) имеет, и притом единственное решение $u(t)$, $t \geqslant \tau$, принадлежащее некоторому функциональному пространству. Кроме того предполагается, что $u(t) \in E\, \forall\, t \geqslant \tau$. Смысл выражения "функция $u(t)$ является решением задачи (4.1)" следует определять в каждом конкретном случае дополнительно. Рассмотрим двупараметрическое семейство отображений $\{U(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$, $U(t,\tau)\colon E \mapsto E$, задаваемое формулой

$$U(t,\tau)u_\tau = u(t), \qquad t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

где $u(t)$ – есть решение задачи (4.1) с начальным условием $u\big|_{t=\tau} = u_\tau$. Легко видеть, что семейство операторов $\{U(t,\tau)\}$ является процессом в E. Причем этот процесс периодичен с периодом p. Нашей целью является исследование аттрактора этого процесса для конкретных динамических систем. Заметим, что ядро $\mathscr{K}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$, отвечающего задаче (4.1), состоит из решений $u(t)$ уравнения (4.1), определенных при всех $t \in \mathbb{R}$ и ограниченных в E: $\|u(t)\|_E \leqslant C_u\, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Излагаемые ниже примеры уравнений являются частными случаями динамических систем с почти периодическими и квазипериодическими символами, изученными в работах [7]–[9]. В этих работах подробно доказаны свойства равномерной асимптотической компактности и непрерывности соответствующих процессов. Мы также будем использовать результаты работы [10] об оценке размерности сечений ядер неавтономных уравнений.

Пример 4.1. *Двумерная система Навье–Стокса с периодической внешней силой.* После исключения давления эта система принимает вид:

$$\partial_t u + Lu + B(u,u) = \varphi(x,t), \qquad x = (x_1,x_2) \in \Omega \Subset \mathbb{R}^2, \tag{4.2}$$

$$L = -\nu\Pi\Delta, \quad B(u,u) = \Pi\sum_{i=1}^{2} u_i\partial_{x_i}u, \qquad \varphi = \Pi\varphi_0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $u = (u^1,u^2)$, $\varphi = (\varphi^1,\varphi^2)$ (см. [1], [11], [12]). Через $H (H_1)$ мы обозначаем, как обычно, замыкание пространства $\mathscr{V}_0 = \{v : v \in (C_0^\infty(\Omega))^2,\ (\nabla,v) = 0\}$ в норме $|\cdot|$ $(\|\cdot\|)$ пространства $(L_2(\Omega))^2$ $((H_1(\Omega))^2)$, Π обозначает ортогональный проектор на H и его различные расширения. Предполагается что $\varphi(\,\cdot\,,t)$ периодическая функция t с периодом

p, причем $\varphi(\cdot,t) \in C_b(\mathbb{R},H)$, и для любых $\tau \in \mathbb{R}$, $T > 0$ функция $\varphi_t'(\,\cdot\,,t) \in L_2([\tau,\tau+T],H_{-1})$, где $H_{-1} = (H_1)^*$. При $t=\tau$ задается начальное условие:

$$u\big|_{t=\tau} = u_\tau, \qquad u_\tau \in H \quad (E = H). \tag{4.3}$$

Как известно, задача (4.2), (4.3) однозначно разрешима в классе функций $u(t) \in C([\tau,+\infty),H) \cap L_2([\tau,\tau+T),H_1)$ $\forall T > \tau$. При этом $\partial_t u \in L_2([\tau,\tau+T),H_{-1})$ (см. [11], [12]). Таким образом, задаче (4.2), (4.3) отвечает периодический процесс $\{U(t,\tau)\}$, действующий в H: $U(t,\tau)\colon H \mapsto H$, $U(t,\tau)u_\tau = u(t)$. В работе [7] показано, что этот процесс равномерно (по $\tau \in \mathbb{R}$) асимптотически компактен и $(H\times\mathbb{T}^1)$-непрерывен. Следовательно, применима теорема 2.1. В частности, множество $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_1 = \bigcup_{\sigma\in[0,p)} \mathscr{K}(\sigma)$ является аттрактором и равномерным (по $\tau \in \mathbb{R}$) аттрактором процесса $\{U(t,\tau)\}$; $\mathscr{K}$ – ядро этого процесса. Легко проверяется непрерывность отображения $(u,t) \mapsto U(t,\tau)u$ по $(u,t) \in H \times \mathbb{T}^1$ при любом фиксированном $\tau \in \mathbb{R}$. Поэтому теорема 2.2 также имеет место.

В работе [10] была доказана следующая оценка для хаусдорфовой размерности сечения $\mathscr{K}(t)$ ядра $\mathscr{K}$ задачи (4.2), (4.3):

$$\dim_H K(t) \leqslant \left\lceil \frac{C}{\nu^2}(M_{-1}(|\varphi|^2)^{1/2} \right\rceil \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

где $M_{-1}(|\varphi|^2) = \frac{1}{p}\displaystyle\int_0^p |\varphi(s)|_{-1}^2\,ds$, константа C не зависит от ν и φ. Здесь и ниже $\lceil a\rceil = \min\{i \in \mathbb{N} : a < i\}$. Теорема 3.1 в применении к задаче (4.2), (4.3) формулируется следующим образом.

Теорема 4.1. *Пусть $\varphi(x,t)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда*

1) $d_H(\mathscr{K}(t)) = d_H(\mathscr{K}(0))$ $\forall t \in \mathbb{R}$,

2) $d_H(\mathscr{A}_0) \leqslant d_H(\mathscr{K}(0)) + 1 \leqslant \left\lceil \dfrac{C}{\nu^2}(M_{-1}(|\varphi|^2)^{1/2} + 1 \right\rceil$.

Аналогичные оценки имеют место также для фрактальной размерности с другой константой C. Необходимые оценки вида (4.4) *доказываются методами, изложенными в* [3].

Доказательство. Достаточно проверить, что периодический процесс $\{U(t,\tau)\}$, соответствующий задаче (4.2), (4.3), удовлетворяет условию Липшица вида (3.6). Пусть $u_1(t) = U(t,\tau)u_{1\tau}$, $u_2(t) = U(t,\tau)u_{2\tau}$. Имеем:

$$\begin{aligned} |u_2(t_2) - u_1(t_1)| &\leqslant |u_2(t_2) - u_1(t_2)| + |u_1(t_2) - u_1(t_1)| \\ &\leqslant C(\tau,T)|u_{2\tau} - u_{1\tau}| + |u_1(t_2) - u_1(t_1)|. \end{aligned} \tag{4.5}$$

При этом мы воспользовались свойством липшицевости $U(t,\tau)u_\tau$ по u_τ, доказанной в [7]. Докажем теперь, что

$$|u_1(t_2) - u_1(t_1)| \leqslant C_1(\tau, T)|t_1 - t_2|, \tag{4.6}$$

где $u_1(\cdot) \in \mathscr{K}$ - любая ограниченная полная траектория процесса $\{U(t,\tau)\}$, $C_1(\tau,T)$ не зависит от $u_1(\cdot) \in \mathscr{K}$. Для доказательства (4.6) мы покажем, что

$$|\partial_t u_1(t)| \leqslant M(T,\tau), \qquad \tau \leqslant t \leqslant T, \tag{4.7}$$

где $M(T,\tau)$ не зависит от $u_1(\cdot) \in \mathscr{K}$. Из (4.7), очевидно, следует (4.6), а из (4.6) и (4.5) следует условие Липшица (3.1).

Для доказательства (4.7) напомним, что любая ограниченная полная траектория $u(t)$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ обладает ограниченными нормами

$$|u(t)| \leqslant M_1, \quad \|u(t)\| \leqslant M_1, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

где M_1 не зависит от $u(\cdot) \in \mathscr{K}$. Доказательство (4.8) приведено, например, в [1] для автономного случая. В том случае, когда $\varphi(\,\cdot\,,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1 оно проводится аналогично. Докажем теперь ограниченность $\|\partial_t u\|_{L_2(\tau,T;H)}$. Для этого умножим скалярно в H уравнение (4.2) на $\partial_t u$:

$$|\partial_t u|^2 + \nu(\nabla u, \nabla\partial_t u) + (B(u,u),\partial_t u) = (\varphi, \partial_t u). \tag{4.9}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}(B(u,u),\partial_t u) &\leqslant \frac{1}{4}|\partial_t u|^2 + C\int_\Omega |u|^2|Du|^2\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{4}|\partial_t u|^2 + C|u|\,\|u\|^2\|u\|_{H_2} \leqslant \frac{1}{4}|\partial_t u|^2 + M_2\|u\|_{H_2}, \\ (\varphi,\partial_t u) &\leqslant 2|\varphi|^2 + \frac{1}{4}|\partial_t u|^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

При этом мы воспользовались (4.8). Интегрируя неравенство (4.9) по t и учитывая неравенства (4.10) получим:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\tau^T |\partial_t u(t)|^2\,dt + \frac{1}{2}\nu\|u(T)\|^2 \\ &\qquad\leqslant +\frac{1}{2}\nu\|u(\tau)\|^2 + M_2\int_\tau^T \|u(t)\|_{H_2}\,dt + 2\int_\tau^T |\varphi(t)|^2\,dt.\end{aligned}$$

Отсюда, из (4.8) и из ограниченности интеграла

$$\int_\tau^T \|u(t)\|_{H_2}^2\,dt \leqslant C(T,\tau)$$

(см., например, [1]) получаем

$$\int_\tau^T |\partial_t u(t)|^2\,dt \leqslant C_2(T,\tau). \tag{4.11}$$

Пусть $\psi(t)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\psi(t)\geqslant 0$, $\psi(t)=0$ при $t\leqslant\tau_1$, и $\psi(t)\equiv 1$ при $t\geqslant\tau$ $(\tau_1<\tau)$. Продифференцируем уравнение (4.2) по t и умножим полученное уравнение скалярно на $\psi(t)\partial_t u$. Мы получим:

$$\begin{aligned}\frac12\partial_t\left(\psi(t)|\partial_t u|^2\right)-\frac12\psi_t'|\partial_t u|^2+\nu\psi\|\partial_t u\|^2&\\ +\psi(B(\partial_t u,u),\partial_t u)&=\psi(\partial_t\varphi,\partial_t u).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}|\psi(B(\partial_t u,u),\partial_t u)|\leqslant\psi|\partial_t u|\|u\|\|\partial_t u\|&\leqslant\frac{\nu}{4}\psi\|\partial_t u\|^2+C\psi|\partial_t u|^2\|u\|^2\\ &\leqslant\frac{\nu}{4}\psi\|\partial_t u\|^2+CM\psi|\partial_t u|^2,\end{aligned}$$

$$|\psi(\partial_t\varphi,\partial_t u)|\leqslant C_\nu\psi\|\partial_t\varphi\|_{-1}^2+\frac{\nu}{4}\psi\|\partial_t u\|^2.$$

Из этих оценок и из (4.12) следует, что

$$\begin{aligned}\frac12\partial_t\left(\psi(t)|\partial_t u|^2\right)&\leqslant\left(\psi_t'+2CM\psi\right)|\partial_t u|^2+2C_\nu\psi\|\partial_t\varphi\|_{-1}^2\\ &\leqslant C_3|\partial_t u|^2+C_4\|\partial_t\varphi\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

Интегрируя последнее неравенство на интервале $[\tau_1,T]$

$$\frac12|\partial_t u(t)|^2\leqslant C_3\int_{\tau_1}^T|\partial_t u(s)|^2\,ds+C_4\int_{\tau_1}^T\|\varphi(s)\|_{-1}^2\,d\tau_1\leqslant C_5(|T-\tau_1|),$$

откуда следует (4.7). Все условия теоремы 3.1 выполнены. Отсюда, учитывая (4.4), имеет место оценка 2) теоремы 4.1.

Пример 4.2. *Система реакции-диффузии с периодическими членами.* Рассматривается система:

$$\partial_t u = \nu a \Delta u - f(u,t) + \varphi(x,t), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \left(\text{или } \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\right), \tag{4.13}$$

где $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $a = \{a_{ij}\}_{i=1,N}^{j=1,N}$ – $N \times N$ матрица с положительной симметрической частью $a + a^* \geqslant \beta^2 I$, $\beta^2 > 0$, $f = (f^1, \dots, f^N)$, $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^N)$, $u = (u^1, \dots, u^N)$. Предполагается, что $\varphi(\cdot,t) \in C_b(\mathbb{R}, H)$, $\varphi_t'(\cdot,t) \in C_b(\mathbb{R}, H_{-1})$, где $H = (L_2(\Omega))^N$, и $f, f_{u^j}', f_t' \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Предполагается, что функции f и φ – периодические по t с периодом p: $f(u,t+p) = f(u,t), \varphi(x,t+p) = \varphi(x,t)$. Предполагаются выполненными следующее условия для всех $t \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^N$:

$$\gamma_2 |u|^{p_0} - C_2 \leqslant (f,u) \leqslant \gamma_1 |u|^{p_0} + C_1, \qquad \gamma_i > 0, \quad 2 \leqslant p_0 \leqslant 2n/(n-2), \tag{4.14}$$
$$(f_u' v, v) \geqslant -C_3(v,v), \qquad |f_u'| \leqslant C_4(|u|+1)^{p_0-2},$$
$$|f_t'| \leqslant C_5(|u|+1)^s, \qquad s \leqslant \frac{n+4}{n-2}.$$

При $n = 2$ числа p_0 и s могут быть любыми, $p_0 \geqslant 2$ (для простоты изложения). Предполагается также, что

$$|f(u+z,t) - f(u,t) - f_u'(u,t)z| \leqslant C_6(1+|u|+|z|)^{p_1}|z|^{1+\gamma_0}, \tag{4.15}$$

где $p_1 < 4/(n-2)$, и γ_0 – положительно и достаточно мало. Система (4.13) дополняется начальным условием:

$$u|_{t=\tau} = u_\tau, \qquad u_\tau \in H = (L_2(\Omega))^N. \tag{4.16}$$

Задача (4.13), (4.16) имеет, и притом единственное, решение в классе функций

$$u(t) \in C_b\big([\tau,+\infty), H\big) \cap L_2([\tau,\tau+T], (H_0^1(\Omega))^N\big)$$

$\forall T \in \mathbb{R}$ (см., например, [1], [13]). Таким образом, задача (4.13), (4.16) порождает периодический процесс $\{U(t,\tau)\}$, действующий в H. В работе [7] показано, что этот процесс равномерно (по $\tau \in \mathbb{R}$) асимптотически компактен и $(H \times \mathbb{T}^1, H)$-непрерывен. Аналогичными методами можно показать, что отображение $(u,t) \mapsto U(t,\tau)u$ удовлетворяет условию Липшица (3.6) относительно $(u,t) \in \mathscr{K}(\tau) \times \mathbb{T}^1$, где $\mathscr{K}$ – ядро процесса $\{U(t,\tau)\}$. Следовательно, применимы теоремы 2.1, 2.2 и 3.1. Приведем оценку для размерности сечений $\mathscr{K}(t)$ ядра $\mathscr{K}$ и размерности аттрактора $\mathscr{A}_0$ задачи (4.13), (4.16).

Теорема 4.2. *При выполнении указанных выше условий на функции $\varphi(x,t)$ и $f(u,t)$*

$$\dim_H \mathscr{K}(t) = \dim_H \mathscr{K}(0) \leqslant \left\lceil C_0/\nu^{n/2} \right\rceil \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{4.17}$$

$$\dim_H \mathscr{A}_0 \leqslant \left\lceil C_0/\nu^{n/2} + 1 \right\rceil. \tag{4.18}$$

Доказательство оценки (4.17) дано в [10] для случая общей зависимости от t функций f и φ.

Доказательство справедливости условия Липшица (3.6) для $u(t) = U(t,\tau)u_\tau$ относительно $(u_\tau, t) \in \mathscr{K}(\tau) \times \mathbb{T}^1$, т.е. оценка

$$\bigl|U(t_2,\tau)u_{2\tau} - U(t_1,\tau)u_{1\tau}\bigr| \leqslant k\bigl(|u_{2\tau} - u_{1\tau}| + |t_2 - t_1|\bigr), \tag{4.19}$$

где $k = k\bigl(|u_{2\tau}|, |u_{1\tau}|, |t_2 - t_1|\bigr)$, устанавливается с помощью стандартных методов (см., например, [1]), аналогично тому, как это сделано в примере 4.1. Подробно оценка (4.19) доказана в [14]. Из (4.19), (4.17) и теоремы 3.1 вытекает (4.18).

Пример 4.3. *Неавтономное диссипативное гиперболическое уравнение с периодическими членами.* Рассматривается уравнение:

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u,t) + \varphi(x,t), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^3, \tag{4.20}$$

где $\gamma > 0$. (Для краткости рассматривается случай $n = 3$.) Предполагается, что $f(u,t) \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot,t), \varphi'_t(\cdot,t) \in C_b(\mathbb{R}, L_2(\Omega))$, f и φ – периодические функции с периодом p: $f(u,t+p) = f(u,t)$, $\varphi(x,t+p) = \varphi(x,t)$. Пусть выполнены следующие условия $\forall\,(t,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$F \geqslant -mu^2 - C_m, \quad F = F(u,t) = \int_0^u f(v,t)\,dv, \quad fu - cF + mu^2 \geqslant -C_m,$$

где $m > 0$ достаточно мало, $c > 0$,

$$|f'_u| \leqslant C(1+|u|)^\rho, \quad |f'_t| \leqslant C(1+|u|)^{\rho+1}, \qquad 0 < \rho < 2,$$

$F'_t \leqslant \beta^2 F + C, \beta > 0$ – достаточно мало,

$$|f'_u(u,t) - f'_u(u_1,t)| \leqslant C(|u| + |u_1| + 1)^{2-\delta}|u - u_1|^\delta, \qquad 0 < \delta \leqslant 1.$$

(Напомним, что в общем случае $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ ограничения на ρ следующие: $0 < \rho < 2/(n-2)$ при $n \geqslant 3$ и $0 < \rho$ при $n = 2$.) Начальные условия ставятся при $t = \tau$:

$$u\big|_{t=\tau} = u_\tau, \quad \partial_t u|_{t=\tau} = p_\tau, \qquad u_\tau \in H_0^1(\Omega), \quad p_\tau \in L_2(\Omega). \tag{4.21}$$

Обозначим $y(t) = (u(t), \partial_t u(t)) = (u(t), p(t))$, $y_\tau = (u_\tau, p_\tau) = y(\tau)$. Как обычно вводим энергетические пространства $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ и $E_1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ с нормами $\|y\|_E^2 = \|u\|_1^2 + \|p\|^2$ и $\|y\|_{E_1}^2 = \|u\|_2^2 + \|p\|_1^2$. При выполнении перечисленных выше условий задача (4.20), (4.21) однозначно разрешима (см. [4], [15]) и порождает процесс $\{U(t,\tau)\}$, действующий в E: $U(t,\tau)y_\tau = y(t)$, $U(t,\tau)\colon E \mapsto E$. Процесс $\{U(t,\tau)\}$ непрерывен и равномерно асимптотически компактен (см. [7], [9]). Следовательно, применимы теоремы 2.1 и 2.2. Пусть $\mathscr{K}$ – ядро процесса. Можно показать, что ядро $\mathscr{K}$ ограничено в E_1, т.е.

$$\forall\, y(\cdot) \in \mathscr{K} \quad \|y(t)\|_{E_1} \leqslant M \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

где M не зависит от $y(\cdot) \in \mathscr{K}$ и от t. В силу теоремы вложения Соболева

$$\forall\, y(t) = (u(t), \partial_t u(t)) \in \mathscr{K} \quad \|u(t)\|_{C_b(\bar\Omega)} \leqslant M_1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Можно показать, что процесс $\{U(t,\tau)\}$ удовлетворяет условиям Липшица (3.6). Применяя теорему 3.1, а также оценки для сечений ядра задачи (4.20), (4.21) из работы [10], получаем.

Теорема 4.3.

1) $$\dim_H \mathscr{K}(t) = \dim_H \mathscr{K}(0) \leqslant \left\lceil \frac{C}{\alpha^3} \right\rceil \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

2) $$\dim_H \mathscr{A}_0 \leqslant \left\lceil \frac{C}{\alpha^3} + 1 \right\rceil,$$

где $\alpha = \min\bigl(\gamma/4, \lambda_1/(2\gamma)\bigr)$, λ_1 *– первое собственное значение оператора* $-\Delta u, u\big|_{\partial\Omega} = 0$, $C = C(M_1)$.

Доказательство теоремы 4.3 аналогично доказательствам теорем 4.1 и 4.2.

В заключение отметим, что оценки из теорем 4.2 и 4.3 также имеют место для фрактальной размерности сечений ядер и для аттракторов соответствующих периодических процессов. Аналогичные выкладки для автономных уравнений изложены в [15].

Институт проблем
передачи информации РАН
e-mail: chep@ippi.msk.su

Поступило
02.06.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
[2] Hale J.K. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems // Mathematical Surveys and Monographs. V. 25: A.M.S., Providence, RI, 1987.
[3] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Springer-Verlag, 1988.
[4] Ghidaghlia J.M., Temam R. Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations // J. Math. Pures Appl. 1987. V. 66. P. 273–319.
[5] Haraux A. Attractors of asymptotically compact processes and applications to nonlinear partial differential equations // Preprint. Université Pierre et Marie Curie, Centre National de la Recherche Scietifique, R87031, 1987.
[6] Haraux A. Systèmes dinamiques dissipatifs et applications. Paris, Milan, Barcelona, Rome, Masson, 1991.
[7] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. №3. P. 279–333.
[8] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Non-autonomous dynamical systems and their attractors // Appendix in the book: M.I.Vishik, Asymptotic behavior of solutions of evolutionary equations: Cambridge University Press, 1992.
[9] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Non-autonomous evolution equations and their attractors // Russ. J. Math. Physics. 1993. V. 1. №2. P. 165–190.
[10] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. A Hausdorff dimension estimates for kernel sections of non-autonomous evolution equations // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. №3. P. 1057–1076.
[11] Ладыженская О.Ф. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
[12] Temam R. On the theory and numerical analysis of the Navier–Stokes equations. Springer-Verlag, 1974.
[13] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерностей // УМН. 1983. Т. 38. №4. С. 133–187.
[14] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Periodic processes and non-autonomous evolution equations with time-periodic terms // Volume in Honour of J. Leray, 1994.
[15] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, Gautier-Villars, 1969.
[16] Dafermos C.M. Almost periodic processes and almost periodic solutions of evolutional equations // Proc. of a University of Florida International Symposium: New-York Academic Press, 1977. P. 43–57.
[17] LaSalle. Stability Theory and invariance principles // Dynamical systems. V. 1: Academic Press, 1976. P. 211–222.
[18] Sell G.R. Non-autonomous differential equations and topological dynamics I, II // Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. P. 241–262, 263–283.