МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

Т Р У Д Ы
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
(Выпуск 1)

Воронеж - 1970 .

В.С.КОЗЯКИН

ОБ УПЛОТНЯЮЩИХ И СЖИМАЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ

Понятия меры некомпактности и уплотняющих операторов [1,2] позволили получить ряд новых фактов в теории вращения векторных полей и неподвижных точек. При некоторых условиях свойства уплотняющих операторы оказываются аналогичными свойствам сжимающих операторов. Попытка исследовать эту взаимосвязь предпринимается ниже.

I. Дадим основные определения.

Мерой некомпактности Куратовского (α -мера некомпактности) будем называть функцию множества α в метрическом пространстве, определяемую формулой:

$$\alpha(\Omega) = \inf Q(\Omega) \quad ,$$

где $Q(\Omega)$ - множество всех $\varepsilon > 0$, для которых у множества Ω существует конечная ε - сеть.

Скажем, что две метрики в метрическом пространстве эквивалентны, если каждая последовательность фундаментальная в одной из них, фундаментальна и в другой.

Известно, что если две метрики ρ_1, ρ_2 эквивалентны, то метрическое пространство одновременно или полно или неполно в обоих этих метриках. Заметим далее, что так как из эквивалентности метрик следует эквивалентность топологий порожденных ими, то для любой точки a метрического пространства M найдется окрестность этой точки, ограниченная в обоих метриках (например, окрестность $A = B_1 \cap B_2$, где B_1, B_2 - шары единичного радиуса с центром в a в метриках ρ_1, ρ_2 соответственно).

Оператор f назовем уплотняющим относительно функции множества χ (или χ -уплотняющим), если $\chi[f(M)] < \chi(M)$ как только обе части неравенства имеют смысл и $\chi(M) \neq 0$.

Ниже будет использоваться следующая

Теорема I. (Meyers P.). Пусть X -полное метрическое пространство. Пусть непрерывный оператор f , действующий в X , удовлетворяет условиям:

I. Существует точка $\xi \in X$ такая, что $f(\xi) = \xi$.

2. $f^n(x) \to \xi$ для всех $x \in X$.

3. Существует окрестность V точки ξ такая, что $f^n(V) \to \xi$.

Тогда для любого $\lambda \in (0,1)$ существует эквивалентная метрика, в которой f -оператор сжатия с константой λ . (Доказательство см. в работе [5]).

Следующая теорема выясняет связь между уплотняющими и сжимающими операторами.

Теорема 2. Для того, чтобы непрерывный α -уплотняющий в полном метрическом пространстве X оператор f был сжимающим в эквивалентной метрике, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

I. Существует точка $\xi \in X$ такая, что $f(\xi) = \xi$.

2. Если $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ для некоторого непустого компактного подмножества $\mathcal{D} \subset X$, то $\mathcal{D}$ состоит из одной точки.

3. $\sup_n \rho[f^n(x), x] < \infty$ для каждой точки $x \in X$ (ρ - метрика в X).

4. Существует окрестность U точки ξ такая, что $\sup_n \operatorname{diam} f^n(U) < \infty$.

Доказательство. Пусть ρ – исходная метрика в X. Пусть f – сжимающий оператор в эквивалентной метрике ρ_1. Для доказательства необходимости достаточно в качестве множества U выбрать шар (в метрике ρ_1) с центром в ξ, который был бы ограничен в метрике ρ. Выполнение остальных условий очевидно.

Достаточность. Из условия 2 теоремы следует, что ξ – – единственная неподвижная точка оператора f.

Через $K\{x_n\}$ будем обозначать множество всех предельных точек последовательности $\{x_n\}$. Как известно (см. [2]), если $x_n = f^n(x)$ $(x \in X)$ и f – уплотняющий оператор, то $f(K\{x_n\}) = K\{x_n\}$ и $K\{x_n\}$ – компактное множество. Поэтому множество $K\{x_n\}$ состоит из одной точки ξ и значит $f^n(x) \to \xi$.

Возьмем множество U, определяемое условием 4 теоремы, и рассмотрим множество $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$. Множество V есть окрестность точки ξ и $f^n(V) \subseteq V$. В работе [3] доказывается что $\alpha[f^n(V)] \to 0$. Воспользуемся этим. Пусть последовательность $\{y_n\}$ такова, что $y_n \in \overline{f^n(V)}$. Тогда $\alpha[\{y_n\}_{n=k}^{\infty}] \leq \alpha[\overline{f^k(V)}] = \alpha[f^k(V)]$. Так как $\alpha[\{y_n\}_{n=k}^{\infty}] = \alpha[\{y_n\}_{n=0}^{\infty}]$ и $\alpha[f^k(V)] \to 0$, то $\alpha[\{y_n\}_{n=0}^{\infty}] = 0$, то есть последовательность $\{y_n\}$ компактна, и потому $K\{y_n\} \neq \varnothing$. Очевидно, $K\{y_n\} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f^n(V)}$. (По поводу использовавшихся здесь свойств α-меры некомпактности см [2]).

Рассмотрим множество $W = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f^n(V)}$. Очевидно, что $f(W) \subseteq W$. Покажем обратное включение. Пусть $x \in W$, тогда $x \in \overline{f^n(V)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для каждого $n \geq 1$ найдется точка

$y_n \in f^n(V)$ такая, что $\rho[f(y_n), x] < \frac{1}{n}$. Но $K\{y_n\} \neq \emptyset$, поэтому можно считать, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к точке $z \in W$ и $\rho[f(y_n), x] \to 0$. Отсюда видно, что $f(z) = x$. Мы доказали равенство $f(W) = W$, для уплотняющего оператора отсюда следует, что W – компактно, поэтому $W = \{\xi\}$.

Покажем, что $\overline{f^n(V)} \to \xi$. Пусть это не так, тогда найдется окрестность S точки ξ и такие точки $z_n \in \overline{f^n(V)}$, что $z_n \bar{\in} S$. Так как $K\{z_n\} = \{\xi\}$, то $z_n \to \xi$ и потому $z_n \in S$ для достаточно больших номеров n.

Итак, мы проверили выполнение всех условий теоремы I. Воспользовавшись теоремой I, мы получим утверждение нашей теоремы.

Заметим, что для уплотняющих операторов условие I теоремы является следствием условий 2 и 3; оно введено для удобства формулировки.

Следствие. Пусть X – полное метрическое пространство конечного диаметра. Для того, чтобы непрерывный α-уплотняющий оператор $f : X \to X$ был сжимающим в эквивалентной метрике, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие 2 теоремы 2.

Для доказательства можно заметить, что условия 3 и 4 теоремы 2, очевидно, выполнены, а условие I следует из условий 2 и 3.

В том случае, когда потребуются достаточные условия, чтобы оператор f был сжимающим в эквивалентной метрике, может быть полезна следующая

Теорема 3. Пусть X – полное метрическое пространство. Пусть $f : X \to X$ – непрерывный оператор, уплотняющий относительно функции множества χ, обладающей следующими свойствами:

I. $\chi(\Omega \cup \{x\}) = \chi(\overline{\Omega})$

2. $\chi(\Omega_1) \le \chi(\Omega_2)$, если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$,

3. если $\chi(\Omega) = 0$, то Ω - компактно.

Для того, чтобы оператор f был сжимающим в эквивалентной метрике, достаточно, чтобы он удовлетворял условиям I-4 теоремы 2 и, кроме того, чтобы нашлась такая окрестность u точки ξ, что величины $\chi[\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} f^k(u)]$ $(n=0,1,\dots)$ определены и $\chi[\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} f^k(u)] \to 0$.

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство достаточной части теоремы 2, так как только свойства I - 3 меры некомпактности Куратовского использовались при доказательстве теоремы 2.

2. В общем случае утверждение теоремы 2 неверно, но, оказывается, можно указать условия, при которых уплотняющий оператор f будет "сжимающим" (точный смысл будет виден из теоремы 3) к некоторому компактному множеству, инвариантному для оператора f.

<u>Лемма.</u> Пусть X - полное метрическое пространство и F замкнутое подмножество. Тогда найдется метрическое пространство T с выделенной фиксированной точкой p в нем и непрерывное отображение $\varphi: X \to T$ такое, что:

I. $\varphi(x) = p$, если $x \in F$.

2. Отображение φ осуществляет гомеморфизм между $X \setminus F$ и $T \setminus \{p\}$.

3. Пространство T полно, если и только если полно пространство X и $\alpha(F) = 0$.

Доказательство. Определим множество T как формальное объединение точек из $X \setminus F$ и абстрактной точки p.

Определим на $T \times T$ вещественную функцию $d(x,y)$.

$$d(x,y)=\begin{cases} \rho(x,y) & \text{, если } x,y \neq p; \\ \rho(x,F) & \text{, если } x \neq p,\ y = p; \\ \rho(F,y) & \text{, если } x = p,\ y \neq p; \\ 0 & \text{, если } x = y = p; \end{cases} \qquad (1)$$

где $\rho(x,y)$ – метрика в T.

Определим теперь на $T \times T$ вещественную функцию σ :

$$\sigma(x,y) = \inf\{d(x,z_1) + d(z_1,z_2) + \dots + d(z_n,y)\} \qquad (2)$$

где *infimum* берется по всевозможным конечным наборам элементов z_1 , z_2 , ..., z_n из T.

Непосредственно из формулы (2) вытекают следующие свойства $\sigma(x,y)$:

1. $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$.

2. $\sigma(x,y) \leq \sigma(x,z) + \sigma(z,y)$.

Докажем теперь, что $\sigma(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,т.е. что σ – метрика на T.

Если $x = y$, то очевидно, что $\sigma(x,y) = 0$. Пусть $\sigma(x,y)=0$.

Рассмотрим следующие случаи:

а) $x,y \neq p$. Рассмотрим произвольный набор элементов z_1 , z_2 , ..., $z_n \in T$. Пусть k и ℓ такие индексы,что

1. $z_i \neq p \quad (1 \leq i < k)$; $z_k = p$.

2. $z_i \neq p \quad (l < i \leq n)$; $z_l = p$.

(мы сейчас предполагаем, что такие индексы найдутся).
В этом случае $d(x, z_1) + \dots + d(z_n, y) \geq$

$$\geq d(x, z_1) + \dots + d(z_{k-1}, z_k) + d(z_l, z_{l+1}) + \dots + d(z_n, y) =$$

$$= \rho(x, z_1) + \dots + \rho(z_{k-1}, F) + \rho(F, z_{l+1}) + \dots + \rho(z_n, y) \geq$$

$$\geq \rho(x, F) + \rho(F, y).$$

Если же таких индексов не найдется, то, очевидно, что $d(x, z_1) + \dots + d(z_n, y) \geq \rho(x, y)$. Мы получили:

$$\sigma(x, y) = \min\left[\rho(x, F) + \rho(F, y), \rho(x, y)\right] \tag{3}$$

б) Пусть $x \neq p$, $y = p$. Так же, как в предыдущем случае легко доказать, что $\sigma(x, y) = \rho(x, F)$

(4)

Из формул (3) и (4) видно, что если $\sigma(x, y) = 0$, то $x = y$
Итак, $\sigma(x, y)$ - метрика на T.
Таким образом, для метрики σ мы получили выражение

$$\sigma(x, y) = \min\{d(x, p) + d(p, y), d(x, y)\} \tag{4!}$$

Из формул (I) и (4!) следует неравенство

$$\sigma(x, y) \leq \rho(x, y) \tag{5}$$

Определим отображение $\varphi: X \to T$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{, если } \quad x \bar{\in} F \\ p & \text{, если } \quad x \in F \end{cases}$$

В силу формулы (5)

$$\sigma[\varphi(x),\varphi(y)] \leq \rho(x,y) \tag{6}$$

поэтому φ – непрерывное отображение.

Докажем второе утверждение леммы.

Очевидно, что φ – взаимно однозначное отображение между $X\setminus F$ и $T\setminus\{p\}$. Покажем, что отображение φ^{-1} непрерывно на $T\setminus\{p\}$.

Пусть $x\in T\setminus\{p\}$, тогда $\rho[\varphi^{-1}(x),F]>0$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Положим $\delta<\min\{\varepsilon,\sigma(x,p)\}$. Пусть $\sigma(x,y)<\delta$, тогда $x,y\neq p$ и $\min\{\rho[\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)], \rho[\varphi^{-1}(x),F]+\rho[F,\varphi^{-1}(y)]\}<\delta$ и поэтому $\rho[\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y)]<\varepsilon$.

Значит, второе утверждение доказано.

Пусть X – полное пространство и пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в пространстве T. Если точка p является предельной для последовательности $\{x_n\}$, то $x_n\to p$. Предположим, что точка p не является предельной для последовательности $\{x_n\}$, тогда найдется такое $\varepsilon>0$, что $\sigma(x_n,p)>\varepsilon$ для всех достаточно больших номеров n. Но тогда из формулы ($4^!$) следует, что для достаточно больших номеров

$$\rho[\varphi^{-1}(x_n),\varphi^{-1}(x_m)] = d(x_n,x_m) = \sigma(x_n,x_m)$$

Отсюда видно, что последовательность $\{\varphi^{-1}(x_n)\}$ фундаментальна в X, но тогда $\varphi^{-1}(x_n)\to y\in X$ и поэтому $x_n\to\varphi(y)\in T$.

Обратно, пусть T – полное пространство и пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в X. Из формулы ($4^!$) следует, что $\{\varphi(x_n)\}$ – фундаментальная последовательность в T, поэтому она сходится в некоторой точке $z\in T$. Если

$z \neq p$, то $x_n \to \varphi^{-1}(z)$ (в силу того, что на $T \setminus \{p\}$ φ^{-1} – гомеоморфизм) ли же $z = p$, то $\rho(x_n, F) \to 0$. Так как F – компакт, то легко видеть, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке из F .

Лемма доказана.

Эта лемма является обобщением на случай произвольных метрических пространств теоремы Куратовского (см. [4] ,стр. 253).

<u>Теорема 4</u>. Пусть f – уплотняющий непрерывный оператор в полном метрическом пространстве X . Пусть оператор f удовлетворяет условиям:

I. Существует компактное множество F такое, что $f(F) \subseteq F$ и из равенства $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ следует, что $\mathcal{D} \subseteq F$.

2. $\sup\limits_n \rho[f^n(x), x] < \infty$ для каждой точки $x \in X$.

3. Существует окрестность $\mathcal{U}$ множества F такая, что $\sup\limits_n \operatorname{diam} f^n(\mathcal{U}) < \infty$.

Тогда существует полное метрическое пространство T и непрерывное отображение $\varphi: X \to T$ такое, что:

I. $\varphi(x) = p$,если $x \in F$.

2. φ – гомеоморфизм между $X \setminus F$ и $T \setminus \{p\}$.

3. Отображение $\varphi f \varphi^{-1}$ является сжатием на T .

Доказательство. Пусть ρ – метрика в X . Заметим, что множество F можно считать замкнутым, в противном случае рассмотрим его замыкание.

Рассмотрим пространство T и отображение φ , определяемые леммой. Так как $f(F) \subseteq F$, то отображение $\varphi f \varphi^{-1}$ определено корректно. Непрерывность отображения $\varphi f \varphi^{-1}$ на $T \setminus \{p\}$ следует из леммы. Пусть $x_n \to p$. Предположим, что последовательность $\{\varphi f \varphi^{-1}(x_n)\}$ не сходится к точке p . Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\sigma[\varphi f \varphi^{-1}(x_{n_k}), p] > \varepsilon$. Но $\rho[\varphi^{-1}(x_{n_k}), F] \to 0$, а так как множество F - компакт, то можно считать, что $\varphi^{-1}(x_{n_k}) \to x_* \in F$. Тогда $\varphi f \varphi^{-1}(x_{n_k}) \to \varphi f(x_*) = p$

Итак, оператор $\varphi f \varphi^{-1}$ непрерывен на T

Определим на T функцию множества ν

$$\nu(\Omega) = \alpha_X[\varphi^{-1}(\Omega)]$$

Нетрудно проверить, что функция ν удовлетворяет условиям I - 3, налагаемым на функцию множества в теореме 3. Так как $\alpha[\bigcup_{k=n}^{\infty} f^k(U)] \to 0$ (см. [3]), то и $\nu\{\bigcup_{k=n}^{\infty}[\varphi f \varphi^{-1}]^k(\varphi(U))\} \longrightarrow 0$. Так как

$$\nu[\varphi f \varphi^{-1}(\Omega)] = \alpha_X[f \varphi^{-1}(\Omega)] < \alpha_X[\varphi^{-1}(\Omega)] = \nu(\Omega),$$

то оператор $\varphi f \varphi^{-1}$ - ν - уплотняющий на T . Так как $\varphi(U)$ - окрестность точки p , то для оператора $\varphi f \varphi^{-1}$ выполнены все условия теоремы 3, откуда и следует настоящая теорема.

В заключение автор благодарит Б.Н.Садовского за постановку задачи и большую помощь в работе.

Л и т е р а т у р а

[I.] Б.Н.Садовский. Об одном принципе неподвижной точки. Функциональный анализ и его приложения, I, вып.2 (1967), 74-76.

[2.] Б.Н.Садовский. О мерах некомпактности и уплотняющих операторах. Проблемы математического анализа сложных систем, вып.2, Воронеж, изд-во ВГУ, 89-120.

[3.] Б.Н.Садовский. Несколько замечаний об уплотняющих операторах и мерах некомпактности. Наст.сб.

[4.] К.Куратовский, Топология, т.I, М.,1966.

[5.] Meyers Philip R. A converse to Banach's contraction theorem. „J. Res. Nat. Bureau Standards", 1967, B 71, N 2-3, 73-76