МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 9, № 2 (1971), 161—170

УДК 513.88

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

В. С. Козякин

Доказываются теоремы существования и находятся непрерывные, определенные на всей вещественной оси R решения функционального уравнения $f(t) = A[t, f(at - b), f(at - c)]$, где a, b, c — вещественные параметры, A: $R \times E \times E \to E$ — непрерывный оператор, E — банахово пространство. Библ. 6 назв.

Пусть E — банахово пространство, R — вещественная прямая. Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(t) = A[t, f(at - b), f(at - c)], \tag{1}$$

при $a > 1$, $c > b$, где $A : R \times E \times E \to E$. Мы будем искать непрерывные решения уравнения (1), определенные на R.

Подобное уравнение возникает в работе [1], в которой для функции распределения состояний забывающего автомата Г. Е. Журавлевым получено функциональное уравнение

$$f(x) = (1 - p) f\left(\frac{x}{\varkappa}\right) + pf\left(\frac{x - 1 + \varkappa}{\varkappa}\right),$$

где $0 < p < 1$, $0 < \varkappa < 1$ — некоторые параметры, определяющие состояние автомата.

Так как уравнение (1) имеет, вообще говоря, несколько решений, то возникает необходимость в каком-то аналоге начальных условий для дифференциальных уравнений. Основное внимание в работе уделяется получению теорем существования при различных предположениях относительно оператора A и параметра a, которые доказываются при помощи принципа сжатых отображений. Полученные теоремы существования позволяют построить решения уравнения (1).

1. Введем обозначения: $\frac{b}{a-1} - c + b = t_1$, $\frac{b}{a-1} = t_2$, $\frac{b}{a} + \frac{c}{a(a-1)} = t_3$, $\frac{c}{a} + \frac{b}{a(a-1)} = t_4$, $\frac{c}{a-1} = t_5$, $\frac{c}{a-1} + c - b = t_6$. Через $C(E, [d, e])$ обозначим пространство непрерывных функций определенных на $[d, e]$ со значениями в E, с нормой

$$\|x(t)\| = \max_{t \in [d, e]} \|x(t)\|_E.$$

Определение 1. Назовем $\varphi(t) \in C(E, [t_1, t_6])$ *левым начальным условием*, если $\varphi(t)$ в точке t_2 удовлетворяет уравнению (1). Назовем $\psi(t) \in C(E, [t_5, t_6])$ *правым начальным условием*, если $\psi(t)$ в точке t_5 удовлетворяет уравнению (1).

Определение 2. Скажем, что функция $f: R \to E$ *удовлетворяет начальным условиям* $\{\varphi, \psi\}$, *если* $f(t)$ определена на $[t_1, t_6]$ и $f(t) = \varphi(t)$ на $[t_1, t_2]$, $f(t) = \psi(t)$ на $[t_5, t_6]$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для непрерывного оператора* $A: R \times E \times E \to E$ *выполнены условия:*

1) $\|A(t, u, v) - A(t, u', v')\| \leqslant K\|u - u'\| + N\|v - v'\|$ $(K, N \geqslant 0)$ при $t \in [t_2, t_5]$, $u, u', v, v' \in E$;

2) *уравнение* $A(t, u, v) = w$ *однозначно разрешимо относительно* v *при* $t \leqslant t_2$, $u, w \in E$, *причем оператор* $v = v(t, u, w)$ *непрерывен в своей области определения;*

3) *уравнение* $A(t, u, v) = w$ *однозначно разрешимо относительно* u *при* $t \geqslant t_5$, $u, w \in E$, *причем оператор* $u = u(t, v, w)$ *непрерывен в своей области определения.*

Пусть существуют начальные условия $\{\varphi, \psi\}$. *Если выполнено одно из условий:*

а) $K + N < 1$, $\quad 1 < a$;

б) K, $N < 1$, $\quad 2 \leqslant a$;

в) $K^2 + N^2 < 1$, $\quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leqslant a$,

то уравнение (1) *имеет единственное решение, определенное и непрерывное на* R *и удовлетворяющее начальным условиям* $\{\varphi, \psi\}$.

Доказательство. Пусть M — подмножество пространства $C(E, [t_1, t_6])$, состоящее из непрерывных на $[t_1, t_6]$ функций, удовлетворяющих начальным условиям $\{\varphi, \psi\}$. Очевидно, что M — полное метрическое пространство. Определим оператор $\Phi: M \to M$ так:

$$(\Phi f)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{, если } t \in [t_1, t_2], \\ A[t, f(at - b), f(at - c)], & \text{если } t \in [t_2, t_5], \\ \psi(t) & \text{, если } t \in [t_5, t_6]. \end{cases} \qquad (2)$$

а) Если выполнено условие (а) теоремы, то в силу условия 1), оператор Φ — сжимающий на M. Обозначим его единственную неподвижную точку через $g(t)$.

б) Пусть выполнено условие б) теоремы; тогда $t_3 \leqslant t_4$. Если $f_1, f_2 \in M$, то

$$\|(\Phi f_1)(t) - (\Phi f_2)(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} K\|f_1(at - b) - f_2(at - b)\| & \text{при } t \in [t_2, t_3], \\ 0 & \text{при } t \in [t_3, t_4], \\ N\|f_1(at - c) - f_2(at - c)\| & \text{при } t \in [t_4, t_5], \end{cases}$$

и $(\Phi f_1)(t) = (\Phi f_2)(t)$ в остальных точках из $[t_1, t_6]$. Отсюда видно, что Φ — сжимающий на M; по теореме Банаха, он имеет в M единственную неподвижную точку $g(t)$.

в) Предположим теперь, что $a \leqslant 2$, но выполнено условие в) теоремы. В этом случае $t_4 \leqslant t_3$, и $at - c \in [t_2, t_4]$, $at - b \in [t_3, t_5]$, когда $t \in [t_4, t_3]$. Для любых $f_1, f_2 \in M$

$$\|(\Phi f_1)(t) - (\Phi f_2)(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} K\|f_1 - f_2\| & \text{при } t \in [t_2, t_4], \\ (K + N)\|f_1 - f_2\| & \text{при } t \in [t_4, t_3], \\ N\|f_1 - f_2\| & \text{при } t \in [t_3, t_5], \text{ и} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\|(\Phi f_1)(t) - (\Phi f_2)(t)\| \leqslant (K + N)\|f_1 - f_2\|. \qquad (4)$$

Пусть $t \in [t_4, t_3]$; тогда

$$\|(\Phi^2 f_1)(t) - (\Phi^2 f_2)(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant K \max_{t \in [t_4, t_3]} \|(\Phi f_1)(at - b) - (\Phi f_2)(at - b)\|_E +$$
$$+ N \max_{t \in [t_4, t_3]} \|(\Phi f_1)(at - c) - (\Phi f_2)(at - c)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant K \max_{t \in [t_3, t_5]} \|(\Phi f_1)(t) - (\Phi f_2)(t)\|_E + N \max_{t \in [t_2, t_4]} \|(\Phi f_1)(t) -$$
$$- (\Phi f_2)(t)\|_E \leqslant 2KN\|f_1 - f_2\| \leqslant (K^2 + N^2)\|f_1 - f_2\|.$$

Учитывая (3) и (4), получим, что

$$\|(\Phi^2 f_1)(t) - (\Phi^2 f_2)(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} K(K+N)\|f_1 - f_2\| & \text{при} \quad t \in [t_2, t_4], \\ (K^2+N^2)\|f_1 - f_2\| & \text{при} \quad t \in [t_4, t_3], \\ N(K+N)\|f_1 - f_2\| & \text{при} \quad t \in [t_3, t_5]. \end{cases}$$

Предположим, что $K \geqslant N$; тогда

$$\|\Phi^2 f_1 - \Phi^2 f_2\| \leqslant K(K+N)\|f_1 - f_2\|.$$

Пользуясь способом оценки Φ^2, легко показать (по индукции), что при $n \geqslant 1$

$$(\Phi^{2n+1} f_1)(t) - (\Phi^{2n+1} f_2)(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} (K^2+N^2)^{n-1} K^2 (K+N)\|f_1 - f_2\| & \text{при} \quad t \in [t_2, t_4], \\ (K^2+N^2)^n (K+N)\|f_1 - f_2\| & \text{при} \quad t \in [t_4, t_3], \\ (K^2+N^2)^{n-1} KN (K+N)\|f_1 - f_2\| & \text{при} \quad t \in [t_3, t_5]. \end{cases}$$

Теперь можно выбрать n настолько большим, чтобы Φ^n был оператором сжатия. Следовательно ([2], стр. 81), оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $g(t)$.

Итак, в любом из случаев а), б), в) оператор (2) имеет единственную неподвижную точку $g(t)$.

Определим методом шагов непрерывные функции $g_1(t)$ при $t \leqslant t_2$ и $g_2(t)$ при $t \geqslant t_5$, пользуясь начальными условиями и условиями 2) и 3) теоремы соответственно. Положим теперь

$$f(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{при} \quad t \leqslant t_2, \\ g(t) & \text{при} \quad t \in [t_2, t_5], \\ g_2(t) & \text{при} \quad t \geqslant t_5. \end{cases}$$

Ясно, что $f(t)$ — непрерывное решение уравнения (1). Единственность $f(t)$ следует из того, что $g_1(t)$, $g(t)$, $g_2(t)$ определяются единственным образом по начальным условиям.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $E = R$. Пусть для непрерывного оператора $A: R \times R \times R \to R$ выполнены условия:*

1) $|A(t, u, v) - A(t, u', v')| \leqslant p\,|u - u'| + (1-p)\,|v - v'| \quad (0 < p < 1)$;

2) $0 \leqslant A(t, u, v) - A(t, u', v') \leqslant p(u - u') + (1-p)(v - v')$ *при* $t \in [t_2, t_5]$, $u \geqslant u'$, $v \geqslant v'$;

3) $A(t, 0, 0) = 0$ *при* $t \in [t_2, t_5]$;

4) *уравнение* $A(t, u, v) = w$ *разрешимо относительно* v *при* $t \leqslant t_2$, $u, w \in R$, *и относительно* u *при* $t \geqslant t_5$, $v, w \in R$.

Пусть существуют начальные условия $\{\varphi, \psi\}$ *такие, что* $\varphi(t) \geqslant 0$, $\psi(t) \geqslant 0$ или $\varphi(t) \leqslant 0$, $\psi(t) \leqslant 0$; *тогда уравнение* (1) *при* $a > 1$ *имеет по крайней мере одно решение (не обязательно непрерывное), удовлетворяющее данным начальным условиям и определенное на* R.

Доказательство. Будем считать, что $\varphi(t) \geqslant 0$, $\psi(t) \geqslant 0$. Выберем последовательность $\{\alpha_n\}$, монотонно сходящуюся снизу к 1. Для каждого α_n найдутся γ_n и δ_n такие, что

$$\gamma_n = \alpha_n A[t_2, \gamma_n, \varphi(t_1)], \qquad \delta_n = \alpha_n A[t_5, \psi(t_6), \delta_n].$$

Заметим, что γ_n и δ_n находятся по α_n однозначно; отсюда и из условия 3) теоремы следует, что если $\gamma = 0$ ($\delta = 0$), то $\gamma_n = 0$ ($\delta_n = 0$) при всех натуральных n.

Из условия 1) и определения γ_n вытекает, что

$$|\varphi(t_2) - \gamma_n| \leqslant \frac{1-\alpha_n}{1-\alpha_n p}\,\varphi(t_2),$$

поэтому $\gamma_n \to \varphi(t_2)$. Аналогично, $\delta_n \to \psi(t_5)$.

Так как $\varphi(t) \geqslant 0$, то $\varphi(t_2) \geqslant 0$. Если $\varphi(t_2) > 0$, то можно считать, что $\gamma_n > 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $\gamma_n \geqslant \gamma_k$ при $n > k$. В предположении противного, пользуясь условиями 2) и 3) и определением γ_n, получаем

$$\gamma_k - \gamma_n \leqslant \frac{(\alpha_k - \alpha_n)\gamma_n}{\alpha_n(1-\alpha_k p)} \leqslant 0.$$

Противоречие.

Значит, $\{\gamma_n\}$ монотонно сходится к $\varphi(t_2)$ снизу. Аналогично, $\{\delta_n\}$ монотонно сходится к $\psi(t_5)$ снизу. В силу этого можно выбрать функции $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$, определенные на $[t_1, t_2]$ и $[t_5, t_6]$ соответственно и такие, что

1. $\varphi(t) \geqslant \varphi_n(t) \geqslant \varphi_k(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_1, t_2]$, $n > k$.
2. $\psi(t) \geqslant \psi_n(t) \geqslant \psi_k(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_5, t_6]$, $n > k$.
3. $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ и $\psi_n(t) \to \psi(t)$ поточечно.
4. $\varphi_n(t_2) = \gamma_n$, $\varphi_n(t_1) = \varphi(t_1)$; $\psi_n(t_5) = \delta_n$, $\psi_n(t_6) = \psi(t_6)$.

Тогда $\{\varphi_n, \psi_n\}$ — начальные условия для уравнения

$$f(t) = \alpha_n A[t, f(at-b), f(at-c)]. \tag{5}$$

Пусть $f_n(t)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $\{\varphi_n, \psi_n\}$. Возьмем функции $g_n(t)$ $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие начальным условиям $\{\varphi_n, \psi_n\}$ и линейные на $[t_2, t_5]$. Очевидно, что $g_n(t) \geqslant g_k(t) \geqslant 0$ при $n > k$, поэтому, если Φ_n — оператор (2) для уравнения (5), то в силу условий 2) и 3)

$$(\Phi_n^p(g_n))(t) \geqslant (\Phi_k^p g_k)(t)$$

при $t \in [t_1, t_6]$, $n > k$, $p = 1, 2, \ldots$ Переходя к пределу по p, получим, что $f_n(t) \geqslant f_k(t)$ на $[t_1, t_6]$.

Заметим, что

$$g_n(t) \leqslant \max\{\max \varphi(t), \max \psi(t)\} = \omega,$$

если $n = 1, 2, \ldots$, поэтому $(\Phi_n^p g_n)(t) \leqslant \omega$ при $t \in [t_1, t_6]$; это вытекает из условий 2) и 3). Следовательно, $f_n(t) \leqslant \omega$; поэтому последовательность $\{f_n(t)\}$ сходится поточечно к некоторой функции $f_*(t)$.

Переходя в равенстве (5) к пределу, получим

$$f_*(t) = A[t, f_*(at - b), f_*(at - c)],$$

причем $f_*(t)$ удовлетворяет начальным условиям $\{\varphi, \psi\}$.

Доказательство завершается подобно соответствующей части доказательства теоремы 1.

В теоремах 1 и 2 предполагалось существование начальных условий, но, например, для уравнения

$$f(t) = |f(at - b)| + |f(at - c)| + 1$$

начальных условий, очевидно, не существует (здесь $E = R$).

ЛЕММА 1. *Если при K, $N < 1$ выполнено условие* 1) *теоремы* 1, *то начальные условия существуют.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v_0 \in E$; рассмотрим оператор $A[t_2, u, v_0]$. В силу условия леммы он является сжимающим. Поэтому найдется точка $u_0 \in E$ такая, что $u_0 = A[t_2, u_0, v_0]$. Рассмотрев непрерывную на $[t_1, t_2]$ функцию $\varphi(t)$, такую, что $\varphi(t_1) = v_0$, $\varphi(t_2) = u_0$, получим левое начальное условие. Аналогично получим правое начальное условие.

2. Мы можем получать решения уравнения (1) в случаях, описываемых теоремой 1, на отрезке $[t_2, t_5]$ методом последовательных приближений, а при $t \leqslant t_2$ и $t \geqslant t_5$ — методом шагов. Однако при $a \geqslant 2$ значения решения на $[t_2, t_5]$ могут быть найдены и другим, в некоторых случаях более удобным способом.

Назовем $[t_1, t_2]$ и $[t_5, t_6]$ *отрезками нулевого ранга.* Разобьем $[t_2, t_5]$ на части в отношении $1 : a - 2 : 1$ и назовем средний отрезок (при $a = 2$ это просто точка) *отрезком первого ранга.* Крайние отрезки опять разобьем в отношении $1 : a - 2 : 1$ и назовем средние отрезки *отрезком второго ранга* и т. д. Множество точек отрезков n-го ранга обозначим через σ_n. По индукции легко доказать, что

$$at - b \in \bigcup_{i=0}^{n-1} \sigma_i, \qquad at - c \in \bigcup_{i=0}^{n-1} \sigma_i \qquad (t \in \sigma_n). \qquad (6)$$

Пусть теперь известно, что $f(t)$ — непрерывное решение уравнения (1); тогда в силу включений (6) $f(t)$ на σ_1 определяется из начальных условий, значения на σ_2 — из значений на $\sigma_0 \cup \sigma_1$ и т. д., а значения на σ_n — из значений на $\bigcup_{i=0}^{n-1} \sigma_i$. Значения $f(t)$ на всем отрезке $[t_2, t_5]$ можно определить по непрерывности, так как $\bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i$ плотно в $[t_2, t_5]$.

Заметим, что полученные способы решения уравнения (1) не дают явного выражения решения. Мы получим явное выражение решения в одном частном случае.

Пусть $E = R$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(t) = (1 - p) f(at - b) + p f(at - c), \quad 0 < p < 1, \quad (7)$$

с постоянными начальными условиями $\varphi(t) \equiv r$, $\psi(t) \equiv s$.

З а м е ч а н и е. Пусть $a \geqslant \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и $f(t)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям $\{r, s\}$; существование этого решения вытекает из теоремы 1. Предположим, что $r \leqslant s$; тогда $f(t)$ — неубывающая функция. Действительно, из неравенства $r \leqslant s$ следует, что во множестве M (см. доказательство теоремы 1) найдется неубывающая функция $f_0(t)$. Но, как нетрудно видеть, оператор Φ, построенный по уравнению (7) в соответствии с (2), переводит всякую неубывающую функцию из M в неубывающую функцию. Поскольку последовательные приближения $\Phi^p f_0$ сходятся к решению $f(t)$, то $f(t)$ также не убывает.

Пусть $a \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $f(t)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям $\{0, 1\}$. К функции $f(t)$ можно применить преобразование Лапласа. Уравнение (7) переводится преобразованием Лапласа в уравнение:

$$\eta(u) = a^{-1}\left[(1-p)e^{-ba^{-1}u} + pe^{-ca^{-1}u}\right]\eta(a^{-1}u) \qquad (8)$$

(под e^u понимаем $\exp(u)$). Заметим, что формальным частным решением уравнения (8) является функция

$$\eta_*(u) = u^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-p)\,e^{-ba^{-n}u} + pe^{-ca^{-n}u}\right].$$

Из теорем сравнения для бесконечных функциональных произведений (см. [3], стр. 277) вытекает, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[(1-p)\,e^{-ba^{-n}u} + pe^{-ca^{-n}u}\right] \neq 0$$

абсолютно сходится и является аналитической функцией во всей комплексной плоскости. Следовательно, $\eta_*(u)$ является решением уравнения (8).

Заметим, что для того, чтобы функция $\eta(u)$ была решением уравнения (8), необходимо и достаточно, чтобы нашлась функция $P(u)$ такая, что $P(u+1) = P(u)$, $\eta(u) = \eta_*(u)P(\log_a u)$.

Изображение $\eta_f(u)$ решения $f(t)$ аналитично при $\operatorname{Re}(u) > 0$ ([4], стр. 9), и $\eta_f(u) = \eta_*(u)P_f(\log_a u)$, где $P_f(u+1) = P_f(u)$. Тогда функция $P_f(u)$ мероморфна при $\operatorname{Re}(a^u) > 0$. Так как

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1,$$

то ([5], стр. 295)

$$\lim_{u\to+0} u\eta_f(u) = 1$$

при $\operatorname{Im}(u) = 0$, поэтому

$$\lim_{u\to+0} P_f(\log_a u) = \lim_{u\to+0}\frac{u\eta_f(u)}{u\eta_*(u)} = 1,$$

т. е. $P_f(u) \to 1$ при $u \to -\infty$, для периодической мероморфной функции это может быть только при $P_f(u) \equiv 1$.

В силу замечания, $f(t)$ удовлетворяет условию Дирихле (кусочно непрерывна и кусочно монотонна на каждом конечном отрезке), поэтому ([4], стр. 82)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{q-i\infty}^{q+i\infty}\eta_*(u)\,e^{ut}\,du, \qquad \text{где} \quad q > 0. \qquad (9)$$

Если $h(t)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям $\{r, s\}$, то $h(t) = (s-r)f(t) + r$. Формула (9) позволяет получить аналитическое выражение для канторовой ступенчатой функции $\chi(t)$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(t) = \frac{1}{2}f(3t) + \frac{1}{2}f(3t-2) \qquad (10)$$

с начальными условиями $\{0, 1\}$. Как известно ([6], стр. 189), вне канторова совершенного множества P_0 функция $\chi(t)$ определяется следующим образом:

$$\chi\left[2\left(\frac{i_1}{3} + \ldots + \frac{i_n}{3^n}\right) + \frac{1}{3^n} + \nu_n\right] = \frac{i_1}{2} + \ldots + \frac{i_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

$\left(i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1,\ 0 < \nu_n < \frac{1}{3^n},\ n = 1, 2, \ldots\right)$; на P_0 функция $\chi(t)$ доопределяется по непрерывности. Положим $\chi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\chi(t) = 1$ при $t \geqslant 1$. Легко видеть, что полученная функция удовлетворяет уравнению (10). Поэтому для $\chi(t)$ имеет место интегральное представление:

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{q-i\infty}^{q+i\infty} u^{-1}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\cdot 3^{-n}u}\right]\right\}e^{ut}\,du.$$

Автор благодарит Б. Н. Садовского за постановку задачи и большую помощь в работе.

Воронежский государственный университет

Поступило 26.XI.1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Журавлев Г. Е., Некоторые свойства забывающего автомата, Сб. «Проблемы математического анализа сложных систем», вып. 3, Воронеж, 1968, стр. 63—65.

[2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., 1968.
[3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, М., 1967.
[4] Мартыненко В. С., Операционное исчисление, Киев, 1966.
[5] Диткин В. А., Прудников А. П., Операционное исчисление, М., 1966.
[6] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948.