О ВИБРОУСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. С. Козякин

В недавней работе М. А. Красносельского и А. В. Покровского [1] выделено и изучено новое понятие виброустойчивости дифференциальных уравнений. Как оказалось, к исследованию таких уравнений сводится математическое описание некоторых моделей пластических тел [2] — [4]. В работе [1] изучены лишь системы уравнений первого порядка; в настоящей работе предлагается аналогичная теория для дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = f[t, x, \dot{x}, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)], \tag{1}$$

где $x, \dot{x} \in R^n$; $t, u, \dot{u}, \ddot{u} \in R^1$; вектор-функция $f(t, x, y, u, v, z)$ непрерывна по совокупности переменных. Функцию $u(t)$ будем называть управлением. Будем считать, что при каждом дважды непрерывно дифференцируемом управлении $u(t)$ существует единственное непродолжимое решение уравнения (1), отвечающее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = y_0$; это решение обозначим через

$$x(t) = W[t_0, x_0, y_0]u(t). \tag{2}$$

Ясно, что W непрерывен как оператор из C_2 в C_2. Здесь и ниже обозначения $C_0(a, b) = C(a, b)$, $C_1(a, b)$, $C_2(a, b)$ применяются как для соответствующих пространств скалярных функций $u(t)$, так и для пространств вектор-функций $x(t)$, определенных в некоторой окрестности $[a, b]$ точки t_0.

Пусть $k, m = 0, 1$. Пусть для каждой ограниченной в некотором пространстве $C_{m+1}(t_0, t_0 + h)$ последовательности управлений $u_n(t) \in C_2(t_0, t_0 + h)$ функции $x_n(t) = W[t_0, x_0, y_0]u_n(t)$ сходятся в пространстве $C_k(t_0, t_0 + h)$ к функции $x_0(t) = W[t_0, x_0, y_0]u_0(t)$, когда управления $u_n(t)$ удовлетворяют условиям $u_n(t_0) = u_0$, $\dot{u}_n(t_0) = v_0$ и сходятся в пространстве $C_m(t_0, t_0 + h)$ к линейной функции $u_0(t) = u_0 + (t - t_0)v_0$. Тогда будем говорить, что уравнение (1) *слабо (C_m, C_k)-виброустойчиво вправо в точке $(t_0, x_0, y_0, u_0, v_0)$*.

Пусть для каждой последовательности управлений $u_n(t) \in C_2(t_0, t_0 + h)$ функции $x_n(t) = W[t_0, x_0, y_0]u_n(t)$ сходятся в пространстве $C_k(t_0, t_0 + h)$ к некоторой функции $x_*(t)$, когда управления $u_n(t)$ удовлетворяют условиям $u_n(t_0) = u_0$, $\dot{u}_n(t_0) = v_0$ и сходятся в пространстве $C_m(t_0, t_0 + h)$ к функции $u_*(t) \in C_m(t_0, t_0 + h)$. Тогда будем говорить, что уравнение (1) *(C_m, C_k)-виброустойчиво вправо в точке $(t_0, x_0, y_0, u_0, v_0)$*.

Аналогично определяется виброустойчивость влево и двусторонняя виброустойчивость.

1. Необходимые условия. Теорема 1. *Необходимым условием слабой (C_1, C) виброустойчивости уравнения (1) вправо в точке $(t_0, x_0, y_0, u_0, v_0)$ является равенство*

$$f(t_0, x_0, y_0, u_0, v_0, z) = az + b. \tag{3}$$

Из этой теоремы вытекает, что уравнение (1) может быть слабо (C_1, C)-виброустойчивым в каждой точке лишь в том случае, если

$$f(t, x, y, u, v, z) = g(t, x, y, u, v)z + h(t, x, y, u, v). \tag{4}$$

Так как и из слабой (C, C)-виброустойчивости и из слабой (C_1, C_1)-виброустойчивости вытекает слабая (C_1, C)-виброустойчивость, то равенства (3) и (4) являются необходимыми условиями как слабой (C, C)-виброустойчивости так и слабой (C_1, C_1)-виброустойчивости.

Теорема 2. *Необходимым условием слабой (C, C_1)-виброустойчивости уравнения (1) вправо в каждой точке является равенство*

$$f(t, x, y, u, v, z) = \varphi(t, x, y, u)v + \psi(t, x, y, u). \tag{5}$$

Подчеркнем, что в условиях теоремы 2 правая часть уравнения (1) не зависит от $\ddot{u}$.

2. Достаточные условия. Теорема 3. *Пусть правая часть уравнения* (1) *имеет вид* (4). *Пусть функции* g, g'_t, g'_x, g'_y, g'_u, h *непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют локальному условию Липшица по переменным* x *и* y.

Тогда уравнение (1) *двусторонне* (C_1, C_1)*-виброустойчиво в каждой точке.*

Ясно, что условия теоремы 3 достаточны и для (C_1, C)-виброустойчивости.

Теорема 4. *Пусть правая часть уравнения* (1) *имеет вид* (5). *Пусть функции* φ, φ'_t, φ'_x, φ'_y, ψ *непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют локальному условию Липшица по переменным* x *и* y.

Тогда уравнение (1) *двусторонне* (C, C_1)*-виброустойчиво в каждой точке.*

3. Как оказывается, гладкости функций g и h из представления (4) недостаточно для (C, C)-виброустойчивости. Сравнительно полный анализ здесь удалось провести в том случае, когда функция f в уравнении (1) имеет более частный вид:

$$f(t, x, y, u, v, z) = g(t, x, u)z + h(t, x, y, u, v). \tag{6}$$

Теорема 5. *Пусть правая часть уравнения* (1) *имеет вид* (6). *Пусть функции* g, g'_t, g'_x, g''_{t^2}, g''_{tx}, g''_{x^2}, h, h'_y, h'_v, h''_{y^2}, h''_{yv}, h''_{v^2} *непрерывны по совокупности переменных. Тогда необходимым условием слабой* (C, C)*-виброустойчивости уравнения* (1) *вправо в каждой точке является равенство*

$$h(t, x, y, u, v) = [g(t, x, u)g'_x(t, x, u) + g'_u(t, x, u)]\, v^2 + \alpha[t, x, u, y - g(t, x, u)v]v + \beta[t, x, u, y - g(t, x, u)v], \tag{7}$$

где $\alpha(t, x, u, z)$, $\beta(t, x, u, z)$ *таковы, что функции* α, α'_z, α''_{z^2}, β, β'_z, β''_{z^2} *непрерывны.*

Теорема 6. *Пусть правая часть уравнения* (1) *имеет вид* (6) — (7). *Пусть функции* g, g'_t, g'_x, g''_{t^2}, g''_{tx}, g''_{x^2}, α, α'_t, α'_x, α'_z, β *непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют условию Липшица по переменным* x *и* z. *Тогда уравнение* (1) *двусторонне* (C, C)*-виброустойчиво в каждой точке.*

Отметим, что при доказательстве сформулированных выше утверждений использовались некоторые конструкции из [1].

Автор благодарен М. А. Красносельскому за постановку задачи и советы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, Виброустойчивость решений дифференциальных уравнений, ДАН **195**:3 (1970), 544—547.

[2] А. Ю. Ишлинский, Общая теория пластичности с линейным упрочнением, УМЖ **6**:3 (1954), 314—325.

[3] J. F. Besseling, A theory of elastic, plastic, and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery, and secondary creep, J. Appl. Mech. **25**:4 (1958), 529—536.

[4] W. Prager, A new method of analising stresses and strains in work-hardening plastic solids, J. Appl. Mech. **23**:4 (1956), 493—496.

Поступило в Правление общества 26 января 1972 г.