Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Воронежский ордена Ленина государственный университет
имени Ленинского комсомола

ТРУДЫ

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ ВГУ

Выпуск V

(СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ)

Воронеж, 1972 г.

Выпуск 5 1972

ОБ ОБРАТНОМ НЕРАВЕНСТВЕ МИНКОВСКОГО ДЛЯ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ.

В.С.Козякин.

В работе [1] изучен вопрос о том, для каких классов функций $f,g \in L_p$ при некотором фиксированном $K>0$ верно неравенство

$$\int fg\,dx \geq K\left(\int f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int g^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

которое естественно назвать обратным неравенством Гёльдера. В [1] приводятся достаточные условия, при которых выполняется это неравенство. Возникает аналогичный вопрос о том, для каких классов функций выполняется "обратное неравенство Минковского":

$$\left(\int|f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq K\left[\left(\int|f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int|g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right] \qquad (p>1) \tag{I}$$

Очевидно, неравенство (I) выполняется при $K=2^{\frac{1-p}{p}}$, если функции f и g одного знака. Другой менее очевидный класс функций, для которых справедливо неравенство (I), будет изучен ниже методами теории конусов. В работе будет использоваться терминология и обозначения из [2].

I. Пусть Ω – открытая ограниченная область в n – мерном пространстве R^n. Пусть в R^n введена полуупорядоченность при помощи некоторого телесного конуса Q. Тогда будем говорить, что заданная на Ω скалярная функция $f(x)$ возрастает, если из $x \leq y$ $(x,y \in \Omega)$ вытекает неравенство $f(x) \leq f(y)$. Обозначим через $K_p(\Omega)$ полугруппу всех возрастающих функций из $L_p(\Omega)$. Линейную часть полугруппы $K_p(\Omega)$ (то есть наибольшее подпространство, содержащееся в полугруппе $K_p(\Omega)$) обозначим через $M_p(\Omega)$. Нас будет интересовать вопрос о нормальности конуса $\widetilde{K}$ в пространстве $L_p(\Omega)$, о котором известно, что $\widetilde{K} \subset K_p(\Omega)$, $\widetilde{K} \cap M_p(\Omega)=0$. Оказывается, нормальность такого конуса зависит от геометрии области Ω.

Скажем, что граница множества Ω $\overset{\circ}{Q}$ - достижима, если

$$\bar{\Omega} \subset \Omega + \overset{\circ}{Q} \cup (-\overset{\circ}{Q})$$

Теорема I. Если граница открытой связной ограниченной области $\overset{\circ}{Q}$ - достижима, то любой конус K такой, что $\tilde{K} \subset K_p(\Omega)$, $K \cap M_p(\Omega) = 0$ нормален в пространстве $L_p(\Omega)$ $(p>1)$.

Примером такого конуса K является множество возрастающих функций $f \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющих равенству $\int_\Omega f \varphi dx = 0$, где $\varphi \in L_q(\Omega)$, $\int_\Omega \varphi dx \neq 0$. Из теоремы I вытекает, что для любых функций f и g из этого множества выполнено неравенство (I).

Условие $\overset{\circ}{Q}$ - достижимости границы области Ω означает, что граница области Ω "достаточно гладкая" по направлениям из $\overset{\circ}{Q}$.

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы I, изложим некоторые вспомогательные факты.

2. Для каждого подпространства M банахова пространства E можно рассмотреть банахово фактор-пространство E/M. Скажем, что полугруппа K в банаховом пространстве E нормальна, если конус K/M (M линейная часть K) нормален в пространстве E/M.

Характеристикой нормальности полугруппы K назовем (ср. [3]) функцию натурального аргумента

$$N(K,n) = \sup_{\substack{x_i \in K/M \\ \Sigma x_i \neq 0}} \frac{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_*}{\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|_*} \qquad (n=1,2,\dots).$$

Как показано в [3], конус K нормален тогда и только тогда, когда $N(K,n) < \infty$ $(n=1,2,\dots)$; конус K допускает оштукатуривание тогда и только тогда, когда числа $N(K,n)$ $(n=1,2,\dots)$ равномерно ограничены.

Нижним раствором полугрупп K_1 и K_2 назовем число

$$\Theta(K_1;K_2)=\inf_{\substack{x\in K_1\\ \|x\|=1}}\rho(x,K_2).$$

Теорема 2. Пусть конус $\widetilde{K}$ лежит в полугруппе K и пусть M – линейная часть K. Тогда $N(K,n)\geqslant\Theta(\widetilde{K},M)N(\widetilde{K},n)$; если при этом $K\subset\widetilde{K}+M$, то $N(\widetilde{K},n)\geqslant\Theta(\widetilde{K},M)N(K,n)$

Доказательство этой теоремы не вызывает затруднений.

Следствие. Пусть конус $\widetilde{K}$ лежит в полугруппе K и пусть

$$K\subset\widetilde{K}+M,\quad \Theta(\widetilde{K};M)\neq 0. \tag{2}$$

Тогда, чтобы конус K/M был нормальным (допускал оштукатуривание) необходимо и достаточно, чтобы конус $\widetilde{K}$ был нормальным (допускал оштукатуривание).

В связи с теоремой 2 возникает вопрос: если $\widetilde{K}$ нормальный конус, а M некоторое подпространство, то обязательно ли $\widetilde{K}+M$ нормальная полугруппа? Оказывается, это множество может не быть даже полугруппой уже в случае, когда M одномерно, и поэтому ответ на этот вопрос отрицателен. Более того, верна

Теорема 3. Пусть $\widetilde{K}$ нетелесный в замыкании своей линейной оболочки конус. Тогда найдется одномерное подпространство M, $M\cap\widetilde{K}\neq\{0\}$ такое, что множество $\widetilde{K}+M$ незамкнуто.

Изложим лишь план доказательства. Сначала предполагая, что теорема не верна, построим нормированную бесконечную систему векторов $e_i\in\widetilde{K}$ и систему положительных функционалов f_i таких, что $f_i(e_i)=1$, $f_i(e_j)=0$ $(j<i)$. Затем выберем последовательность чисел $C_i>0$ и последовательность индексов K_i так, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty}C_i<\infty$ и $C_i\leqslant f_{K_i}\left(\sum_{j=1}^{\infty}C_j e_{K_j}\right)\leqslant 2C_i$ $(i=1,2,\dots)$. Обозначим вектор $\sum_{j=1}^{\infty}C_j e_{K_j}$ через e_*, а содержащее его одномерное подпространство – через M. Заметим, что для каждого $y\in\widetilde{K}+M$ отношения $\dfrac{f_{K_i}(y)}{f_{K_i}(e_*)}$ равномерно ограничены снизу. Поэтому если мы выберем числа $d_i>0$ так, чтобы $\overline{\lim}\frac{d_i}{c_i}=\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty}d_i<\infty$ и положим $y_*=-\sum_{j=1}^{\infty}d_j e_{k_j}$, то $y_*\overline{\in}\widetilde{K}+M$. С другой стороны, легко показать, что $y_*\in\overline{\widetilde{K}+M}$.

Мы пришли к противоречию, которое доказывает теорему.

Теорема 3 неулучшаема в том смысле, что существует телесный конус $\widetilde{K}$, для которого множество $\widetilde{K}+M$ замкнуто для любого одномерного подпространства M.

3. Приступим к доказательству теоремы I. Предварительно докажем теорему I в случае $n=1$. Причем в этом случае мы будем предполагать лишь, что Ω – измеримое по Лебег множество конечной меры (а не открытое, как в случае произвольного n). В этом случае теорема I может быть сформулирована так:

Теорема 4. Любой конус $\widetilde{K}$ такой, что $\widetilde{K}\subset K_p(\Omega)$, $K\wedge M_p(\Omega)=$ нормален в пространстве $L_p(\Omega)$ $(p>1)$

Доказательство. Рассмотрим множество

$$K_0=\{f: f\in K_p(\Omega),\ f(x)(x-\alpha_0)\geq 0 \text{ почти при всех } x\in\Omega\}$$

где α_0 выбрано так, чтобы $0<mes[(-\infty,\alpha_0)\wedge\Omega]<mes\,\Omega$

Если $f,g\in K_0$, $\int_\Omega|f|^p dx=\int_\Omega|g|^p dx=1$, то почти при всех $x\in\Omega$ числа $f(x)$ и $g(x)$ одного знака. Поэтому

$$|f(x)+g(x)|^p\geq|f(x)|^p+|g(x)|^p$$

Отсюда вытекает неравенство $\left(\int_\Omega|f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\geq 2^{\frac{1}{p}}$, которое показывает, что конус K_0 нормален.

Линейная часть полугруппы $K_p(\Omega)$ одномерна – она состоит из функций-констант, поэтому

$$\Theta[K_0,M_p(\Omega)]\neq 0,\ K_p(\Omega)\subset K_0+M_p(\Omega)$$

В силу следствия из теоремы I, отсюда вытекает, что конус

$K_p(\Omega)/M_p(\Omega)$ нормален. Если $\tilde{K}$ - конус и $\tilde{K}\wedge M_p(\Omega)=0$, то $\Theta[\tilde{K},M_p(\Omega)]\neq 0$ так как пространство $M_p(\Omega)$ одномерно. В этом случае из теоремы I вытекает, что $N(K,n)<\infty$ $(n=1,2,\ldots)$ и, следовательно, конус $\tilde{K}$ нормален. Теорема доказана.

В случае произвольного n основная идея доказательства теоремы 4 сохраняется, но доказательство становится значительно более сложным технически. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы I подпространство $M_p(\Omega)$ состоит из функций- констант и, следовательно, одномерно. Ввиду ограниченности объема работы отметим лишь основные этапы доказательства теоремы I. Рассмотрим конус $K_p^*=\{f : f\in K_p(\Omega); \int_\Omega f dx=0\}$

Лемма I. Пусть для $f_n, g_n\in K_p^*$ $(n=1,2,\ldots)$ выполнены условия

$$\int_\Omega |f_n|^p dx=\int_\Omega |g_n|^p dx=1, \quad \int_\Omega |f_n+g_n|^p dx\to 0 \tag{3}$$

Тогда существует последовательность индексов n_k таких, что

$$f_{n_k}(x)\to 0, \quad g_{n_k}(x)\to 0 \quad (x\in\Omega)$$

При помощи этой леммы может быть доказана

Лемма 2. Пусть граница связной открытой области Ω $\overset{\circ}{Q}$ -достижима. Тогда конус K_p^* нормален в пространстве $L_p(\Omega)$ $(p>1)$

Теперь, заменив в теореме 4 K_0 на K_p^* и проведя дословно все рассуждения теоремы 4, получим доказательство теоремы I.

4. Приведем без доказательства пример, который показывает, что требование $\overset{\circ}{Q}$ - достижимости границы области Ω в теореме I существенно. Рассмотрим на плоскости (x,y) конус $Q=\{(x,y): y\geqslant |x|\}$. Выберем на отрезке $[0,1]$ непрерывно дифференцируемую функцию $\lambda(x)$ такую, что $\lambda(0)=0$, $\lambda'(0)=0$, $\lambda'(x)>0$ $(x>0)$. Определим область

$\Omega=\{(x,y):\ 0<x<1,\ 0<y<\lambda(x)\}$. Можно показать, что в этом случае конус K_p^+, а следовательно и полугруппа $K_p(\Omega)$ не являются нормальными.

Автор благодарен М.А.Красносельскому за постановку задачи и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА: I. Э.Беккенбах, Р.Беллман, Неравенства, М., Мир, 1965, стр.60-65. 2. М.А.Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, М., Физматгиз, 1962. 3. Лифшиц Е.А., Функциональный анализ и его приложения, т.3, вып.I, 1969, 91-92.