О РОЖДЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК ИЗ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В. С. Козякин

Ниже обсуждается вопрос о рождении малых периодических точек некоторого отображения. Изучается лишь отображение плоскости, так как в широких предположениях N-мерный случай ($N > 2$) принципиально не отличается от двумерного.

1. Рассмотрим отображение плоскости $X(\lambda; x)$ ($x = \{x_1, x_2\}$, λ, $x_1, x_2 \in R^1$), имеющее при всех λ неподвижную точку $x = 0$.

Скажем, что при $\lambda = \lambda_0$ рождаются малые периодические точки отображения $X(\lambda; x)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $x_\varepsilon \in R^2$, $\lambda_\varepsilon \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ и натуральное n_ε такие, что

$$x_\varepsilon = X^{n_\varepsilon}(\lambda_\varepsilon; x_\varepsilon),\ 0 < \| X^n(\lambda_\varepsilon; x_\varepsilon) \| < \varepsilon\ (n = 1, 2, \ldots, n_\varepsilon).$$

Положим $A(\lambda) = X'_x(\lambda; 0)$. Очевидна (ср. [1]) следующая

Лемма. *Если при $\lambda = \lambda_0$ рождаются малые периодические точки отображения $X(\lambda; x)$, то матрица $A(\lambda_0)$ имеет собственные значения на единичной окружности.*

2. Пусть

$$X(\lambda; x) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\lambda; x) + Y_n(\lambda; x), \tag{1}$$

где $X_k(\lambda; x)$ — однородные порядка k и непрерывные по λ многочлены переменных x_1, x_2 со значениями в R^2, а $Y_n(\lambda; x)$ — непрерывное по совокупности переменных отображение равномерно по λ более высокого порядка малости, чем $\| x \|^n$.

Говорят (см., например, [2], [3]), что отображение (1) задано в нормальной форме, если $X_k(\lambda; x) \equiv 0$ при четных k и $X_k(\lambda; (x) = \alpha_3(\lambda)(x_1^2 + x_2^2)^{(k-1)/2} J_{\beta_k(\lambda)} x$ при нечетных k, где $\alpha_k(\lambda) \geqslant 0$, $\beta_k(\lambda)$ — непрерывные функции λ, J_β — матрица поворота на угол β:

$$J_\beta = \begin{Vmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, числа $\alpha_1(\lambda) \exp[i\beta_1(\lambda)]$ и $\alpha_1(\lambda) \exp([-i\beta_1(\lambda)]$ являются собственными значениями матрицы $A(\lambda)$. Всюду ниже предполагается, что $\alpha_1(\lambda_0) = 1$. В этом случае при $\beta_1(\lambda_0) \neq 2\pi \frac{p}{q}$ ($q = 1, 2, \ldots, n+1$; $p = 1, 2, \ldots, q$) отображение (1) заменой переменных приводится к нормальной форме (см., например, [2], [3]).

3. Один из методов изучения рождения малых периодических точек заключается в следующем [6].

Пусть отображение $X(\lambda; x)$ достаточно гладкое, и пусть $\alpha_3(\lambda_0)\cos[\beta_3(\lambda_0) - \beta_1(\lambda_0)] \neq 0$, $\alpha_1'(\lambda_0) \neq 0$. Тогда [3], [6] при всех λ из некоторого интервала $(\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0)$ или $(\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$ у отображения $X(\lambda; x)$ есть инвариантное многообразие — цикл, охватывающий точку $x = 0$ и стягивающийся к ней при $\lambda \to \lambda_0$. Известно, что все малые периодические точки могут лежать только на этом цикле. Поэтому [4] всякое условие непостоянства числа вращения $\varkappa(\lambda)$ отображения $X(\lambda; x)$ цикла в себя является одновременно достаточным условием существования периодических точек на цикле. Одно из наиболее простых условий непостоянства $\varkappa(\lambda)$ в окрестности λ_0 имеет вид

$$\alpha_1'(\lambda_0) \operatorname{tg}[\beta_3(\lambda_0) - \beta_1(\lambda_0)] \neq \beta_1'(\lambda_0); \tag{2}$$

следовательно, при выполнении условия (2) на цикле будут рождаться периодические точки. Формула (2), видимо, ранее не отмечалась.

Отображение $X(\lambda; x)$ может иметь инвариантные циклы и при $\alpha_3(\lambda_0)\cos[\beta_3(\lambda_0) - \beta_1(\lambda_0)] = 0$ [5]. Значит, и в этом случае можно провести предыдущие рассуждения и установить условия рождения периодических точек.

4. Описанный подход привлекает своей простотой и геометрической наглядностью. Однако при его анализе появляется некоторое чувство неудовлетворенности. Действительно, он опирается на доказательство существования инвариантных циклов. Поэтому возникает вопрос о том, будут ли рождаться периодические точки в условиях, когда нельзя гарантировать существование циклов.

Например, в [3], [5], [6] существование циклов доказывается в предположении высокой гладкости отображения $X(\lambda; x)$; здесь требуется по меньшей мере 5-кратная дифференцируемость $X(\lambda; x)$ по x в окрестности нуля. Кроме того, доказательства (см. [3], [5], [6]) существования циклов используют тем или иным образом нормальную форму, поэтому с ростом n все большие ограничения накладываются на $\beta_1(\lambda_0)$.

5. Ответить на возникшие в п. 4 вопросы в рамках описанного выше подхода автор не смог, в связи с чем был использован другой подход. Он аналогичен доказательству теоремы Дж. Д. Биркгофа о периодических точках отображений, сохраняющих площадь (см., например, [2]), и существенно использует метод функционализации параметра М. А. Красносельского [7]; суть его в следующем.

Нормальная форма позволяет достаточно просто изучить вид и свойства степеней $X^m(\lambda; x)$ отображения $X(\lambda; x)$. Оказывается, что величины λ и $\|x\|$ «влияют» в естественных ситуациях на $X^m(\lambda; x)$ независимо (с точностью до членов высших порядков малости). Это позволяет при достаточно больших натуральных m и при достаточно малых $\varepsilon > 0$ подобрать такую лежащую в ε-окрестности нуля область $D(\varepsilon)$ $(0 \overline{\in} D(\varepsilon))$ и такую определенную на $D(\varepsilon)$ функцию $\lambda_\varepsilon(x)$ $(|\lambda_\varepsilon(x) - \lambda_0| < \varepsilon)$, что вращение векторного поля $x - X^m[\lambda_\varepsilon(x); x]$ на границе области $D(\varepsilon)$ будет отлично от нуля. Поэтому найдется точка $x_\varepsilon \in D(\varepsilon)$, удовлетворяющая равенству $x_\varepsilon = X^m[\lambda_\varepsilon(x_\varepsilon); x_\varepsilon]$. Положив $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(x_\varepsilon)$, мы получаем $x_\varepsilon = X^m(\lambda_\varepsilon; x_\varepsilon)$, где $0 < \|x_\varepsilon\| < \varepsilon$, $|\lambda_\varepsilon - \lambda_0| < \varepsilon$.

6. Примененный нами подход позволяет установить следующее утверждение.

Теорема. *Пусть отображение* $X(\lambda; x)$ *имеет вид* (1) *при* $n = 3$ *и матрица* $A(\lambda)$ *дифференцируема по* λ *в точке* λ_0. *Пусть* $\alpha_1(\lambda_0) = 1, \alpha_1'(\lambda_0) \neq 0, \alpha_3(\lambda_0) \neq 0, 0 < \beta_1(\lambda_0) < \pi$ $\beta_1(\lambda_0) \neq \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$, *и пусть выполнено условие* (2). *Тогда*

1) *при* $\lambda = \lambda_0$ *происходит рождение малых периодических точек отображения* $X(\lambda; x)$;

2) *найдутся* $\varepsilon_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *такие, что при* $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_n$ *в* ε_n-*окрестности нуля нет отличных от нуля неподвижных точек отображения* $X^n(\lambda; x)$.

В силу утверждения 2) теоремы период n_ε рождающихся периодических точек x_ε стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$. По-видимому, такой факт отмечается впервые.

Отметим, что в условиях теоремы инвариантных циклов у отображения $X(\lambda; x)$ может не быть.

7. Автор благодарен М. А. Красносельскому, под руководством которого он работает.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.

[2] К. Л. Зигель, Лекции по небесной механике, М., «Мир», 1969.

[3] R. Sacker, On invariant surface and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations, NYU Report, IMM-NYU 333, Oct. 1964.

[4] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

[5] I. Gumowski, C. Mira, Bifurcation pour une recurrence du deuxieme ordre, par traversee d'un cas critique avec deux multiplicateurs complexes conjuges, C. R. Acad. Sci. Paris **278**, Serie A, № 25 (1974), 1591—1594.

[6] Ю. И. Неймарк, Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, Изв. вузов, Радиофизика **2** (1958) 95—118.

[7] М. А. Красносельский, О рождении автоколебаний из состояния равновесия, Автоматика и телемеханика **1** (1973), 183—184.

Поступило в Правление общества 30 сентября 1976 г.