А. Р. БЕЛКИН
М. Ш. ЛЕВИН

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ: КОМБИНАТОРНЫЕ МОДЕЛИ АППРОКСИМАЦИИ ИНФОРМАЦИИ

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ
СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

А. Р. БЕЛКИН, М. Ш. ЛЕВИН

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ: КОМБИНАТОРНЫЕ МОДЕЛИ АППРОКСИМАЦИИ ИНФОРМАЦИИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.18
Б 43
УДК 519.816

Белкин А. Р., Левин М. Ш. **Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации.** М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— (Теория и методы системного анализа).— 160 с.— ISBN 5-02-014378-2.

Монография посвящена анализу дискретных задач принятия решений, выделению типовых комбинаторных моделей аппроксимации структур предпочтений. Анализируются типовые стратегии решения таких проблем, как выбор лучших альтернатив, линейное и групповое упорядочение, формирование портфеля заказов. Рассматриваются методы решения возникающих оптимизационных задач, приводятся примеры решения на ЭВМ ряда практических задач подготовки и принятия решений на основе предлагаемых моделей.

Для специалистов в области интерактивных систем искусственного интеллекта и поддержки принятия решений, а также для студентов и аспирантов по специальностям математическая кибернетика, системный анализ и принятие решений.

Табл. 12. Ил. 26. Библиогр. 197 назв.

Рецензенты:
доктор физико-математических наук *В. И. Цурков*,
доктор технических наук *В. М. Солодов*

Б $\frac{1402030000-040}{053(02)-90}$ 150-90

ISBN 5-02-014378-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материю песни, ее вещество
Не высосет автор из пальца.
Сам бог не сумел бы создать ничего,
Не будь у него матерьяльца.

Г. Гейне

В современной науке весьма распространена такая ситуация, когда некий Исследователь берется за трудную Проблему и решает ее или показывает, что она не может быть решена. Действия его в данном случае высоко оцениваются окружающими и выглядят чрезвычайно привлекательно; однако практика требует и других исследований. Не менее важным и нужным оказывается проводить сравнительный анализ давно известных объектов: задач, моделей, методов, схем и т. п.— с тем чтобы сгруппировать их, наметить пути к упорядоченному, обоснованному исследованию и использованию. Подобные методологические проблемы намного менее притягательны и почитаемы, более того, нередко соответствующие исследования оцениваются по набившему оскомину стереотипу: ничего экстраординарного, объекты давно известны, просто переставлены по-иному! Все же такие исследования нужно проводить, ибо это не что иное, как попытки системного анализа соответствующего научно-практического направления. Именно в результате подобной инвентаризации и могут обнаруживаться «белые пятна», нерешенные задачи и даже новые направления исследований.

Авторы данной книги взяли на себя не очень благодарную миссию попытаться хотя бы до некоторой степени упорядочить по своему вкусу и на свой манер типовые задачи, модели и другие объекты в прикладной теории принятия решений. Подобно тому, как при анализе некоторого технологического процесса (например, переработки сырья) инженер-технолог, располагающий набором стандартных средств, разрабатывает общую схему процесса на базе типовых фрагментов, можно рассматривать и интеллектуальные процессы переработки и преобразования информации при подготовке управленческих, плановых или проектных решений.

В рамках исследований в области искусственного интеллекта идея рассмотреть процесс решения задачи как последовательный, многоэтапный переход от некоторого начального состояния в конечное через ряд промежуточных опорных ситуаций далеко не нова (см., например, [109]). Здесь мы попытались применить ее к задачам принятия решений. Выделив ряд типовых задач (таких, как выделение лучшего объекта или группы лучших, линейное или групповое упорядочение и др.), можно исследовать процесс их решения как последовательное преобразование исходной структуры предпочтений в некоторую финальную структуру, оптимальным образом аппроксимирующую исходную. В работе вводятся и классифицируются типовые, базовые опорные ситуации (базовые структуры) и показывается, что весь процесс решения задачи может быть разбит на достаточно стандартные фрагменты, в рамках каждого из которых решается некоторая локальная подзадача и производится переход от одного типа базовых структур к другому. Тем самым в явном виде формируется база для проектирования технологий подготовки и принятия решений.

Опишем вкратце структуру и содержание работы. Глава 1 содержит описание основных уровней архитектуры интерактивных систем поддержки принятия решений, здесь вводится основная терминология и рассматриваются типовые постановки задач принятия решений. На базе вводимых структур аргументируется основная концепция авторов о представлении процесса решения типовых задач в виде цепочки стандартных фрагментов, каждый из которых отвечает той или иной подзадаче, и дается классификация таких стандартных операций преобразования. Для каждой из выделенных типовых задач рассматриваются возможные пути последовательной аппроксимации.

Глава 2 содержит описание необходимого математического аппарата, и на его основе анализируется такое ключевое для задач принятия решений понятие, как формальная модель. Анализируются основные требования, предъявляемые к моделям, возможные принципы их построения, взаимосвязь между моделями, процедурами и методами принятия решений.

Последующие главы конкретизируют полученные результаты применительно к конкретным типовым задачам принятия решений. В главе 3 подробно рассматриваются модели линейного упорядочения альтернатив. Вводится система из 12 желательных свойств, каждое из которых легко интерпретируется на содержательном уровне, и на базе этой системы проводится широкий сравнительный анализ целого ряда известных моделей (таких, как Брэдли-Терри, Бержа, Ушакова, ближних и дальних связей, максимального согласования и др.). Такой подход, позволяющий при необходимости выбирать такую модель, которая обладает желательными для ЛПР в данном случае свойствами, представляется авторам конструктивным и удобным при создании реальных интерактивных систем. В главе 4 аналогичным образом рассматривается и более общая задача о групповом упорядочении объектов. Свойства оптимальных групповых упорядочений при этом, в большинстве своем, формулируются как естественные обобщения соответствующих свойств линейных упорядочений, что несколько облегчает конкретный анализ.

Еще одной весьма важной задачей является выделение подмножества лучших объектов. Исследование моделей для задач такого типа проводится в главе 5, начиная с давно известных в исследовании операций простейших моделей задачи о рюкзаке (обычной, треугольной, лестничной и т. п.). Рассматриваются и различные типы более сложных задач: с иерархическими ограничениями, многокритериальные, многорюкзачные, а также задачи генерации альтернатив. Для них приводятся основные подходы к построению алгоритмов решения и человеко-машинных процедур.

Наконец, глава 6 содержит примеры решения ряда практических задач (планирование застройки в крупном городе, анализ значимости отказов компонентов технического устройства, анализ показателей качества машиностроительной продукции, проектирование связи в информационно-вычислительных сетях и др.). Приведена методическая схема комплексного анализа качества

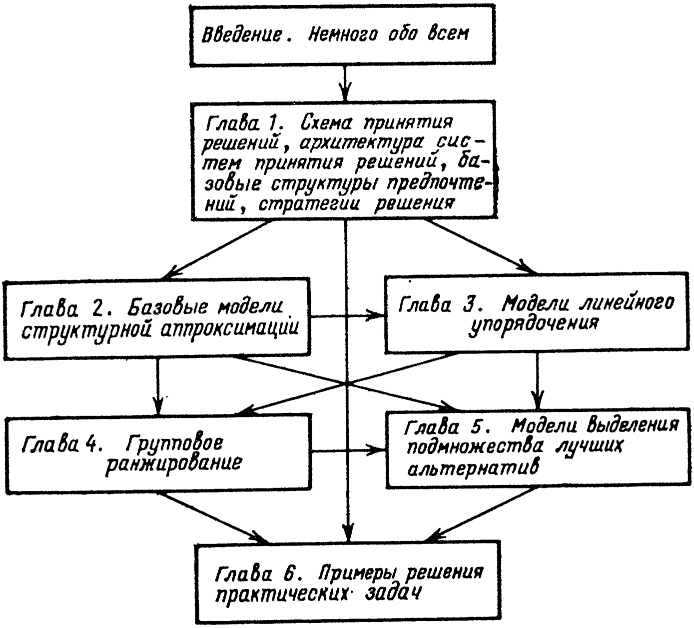


Рис. 0.1. Структура книги

машиностроительной продукции, включающая ряд типовых задач ранжировки, выбора подмножества лучших объектов и т. п. В Заключении выражена надежда на разработку широкого набора инструментальных средств для технологии подготовки и принятия решений.

Настоящая книга ориентирована на специалистов по исследованию операций, системному анализу и теории принятия решений. Авторам хотелось бы надеяться, что среди широкого круга инженеров, математиков, кибернетиков, экономистов, управленцев почти каждый в конце концов сможет найти часть текста, которая его заинтересует. Рис. 0.1 поможет ориентироваться во взаимосвязи различных разделов книги.

Глава 1 написана авторами совместно, главы 2—4 Белкиным А. Р., главы 5—6 — Левиным М. Ш. В то же время авторы не отказываются от коллективной ответственности за всю работу в целом.

Отметим наконец, что в процессе подготовки рукописи отдельные ее фрагменты читались и третьими лицами (за что мы им весьма благодарны, хотя и не сочли уместным называть кого-либо персонально) и возвращались обычно авторам с краткой рецензией типа: «В общем, ничего, но я написал бы об этом по-иному!» Часть из этих рецензий была учтена, за остальными же рецензентами мы оставляем полное право написать по-иному.

Глава 1

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ И ЗАДАЧИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУР

Свет ночной, ночные тени,
тени без конца,
Ряд волшебных изменений
милого лица . . .

А. А. Фет

При принятии решений обычной является ситуация, когда рассматриваемая проблема слабо структуризована и формализации поддаются лишь отдельные фрагменты общей постановки [75]. Исходная информация зачастую неполна и/или противоречива, поскольку для ее получения используются не только строгие объективные измерения, но и экспертные оценки; корректное принятие решений в явном или неявном виде требует дополнительной структуризации проблемы, пополнения имеющейся информации и устранения (хотя бы частичного) имеющихся противоречий [25, 99, 105]. В результате такой обработки исходная проблема оказывается аппроксимированной некоторой хорошо структуризованной проблемой, в том или ином смысле достаточно близкой к исходной и принадлежащей к заданному классу проблем, выбор которого определяется постановкой задачи принятия решения.

В настоящей работе предлагается классификация таких аппроксимирующих проблем, которая базируется на теоретико-графовых моделях. В рамках данной главы мы рассмотрим вначале основные уровни архитектуры интерактивных *систем принятия решения* (СПР) и охарактеризуем вкратце проблемы, возникающие на том или ином уровне. Далее будет описана общая схема процесса принятия решения, включающая этапы генерации и подготовки альтернатив, их оценки и анализа и т. д. По итогам исследования такого процесса выдвигается базисная концепция, предполагающая, что, начиная с некоторого момента, процесс выработки оптимального решения может быть представлен в виде цепочки последовательных аппроксимаций имеющейся структуры предпочтений при помощи стандартных базовых структур из определенных классов. Вводятся и классифицируются основные типы таких структур, рассматриваются также возможные пути последовательной аппроксимации.

Подчеркнем еще, что настоящая глава носит, в основном, концептуальный характер; строгие определения и математические выкладки приводятся, при необходимости, в последующих главах.

1.1. Уровни архитектуры интерактивных систем принятия решений

Возьми
разбольшущий
дом в Нью-Йорке,
Взгляни
насквозь
на зданье на то.

В. В. Маяковский

Не претендуя на общность, рассмотрим вкратце особенности различных уровней архитектуры интерактивных СПР.

1. *Целевой уровень.* На этом самом общем уровне определяются цели, которым подчинена система, осуществляется взаимосвязь понятийной базы (терминологии, тезауруса), целей и задач принятия решений.

2. *Уровень постановок задач принятия решений.* Из возможных постановок *задач принятия решений* (ЗПР) отметим следующие основные постановки (см., например, [16, 117, 120, 128]):

1) линейное упорядочение альтернатив (объектов, вариантов, элементов и т. п.);

2) выделение лучшей альтернативы;

3) выделение подмножества (неупорядоченного) лучших альтернатив;

4) выделение упорядоченного подмножества лучших альтернатив;

5) частичное упорядочение альтернатив;

6) упорядоченное (или, реже, хотя бы частично упорядоченное) разбиение альтернатив (стратификация, групповое упорядочение);

7) неупорядоченное разбиение альтернатив (классификация).

В рамках отдельных типов задач возможно введение дополнительных условий или ограничений, приводящее к дополнительному дроблению и выделению подтипов. Так, в задачах классификации, стратификации и выделения подмножеств могут быть введены ограничения на число и мощность отдельных классов или подмножеств, в задаче частичного упорядочения может быть регламентирован желаемый тип частичного порядка и т. д.

Заметим, что перечисленные постановки тесно взаимосвязаны между собой. Так, линейное упорядочение альтернатив одновременно автоматически задает и лучшую альтернативу, упорядоченное разбиение порождает и подмножество лучших альтернатив и т. д. Такая их взаимосвязь дает возможность использовать промежуточные результаты (и промежуточные структуры), полученные при решении одной ЗПР, и для решения других. Несколько подробнее этот вопрос рассматривается ниже.

3. *Уровень процедур.* Сюда включаются общие процедуры решения, процедуры обработки результатов измерений характеристик альтернатив, получения и обработки экспертных оценок, организа-

ции диалога с экспертами и *лицом* (или группой лиц), *принимающим решение* (ЛПР) и т. д. [23, 46, 75, 99, 104, 113].

Процедуры организации опроса ЛПР являются предметом исследования большинства работ в области принятия решений [33, 117, 120, 128, 135]. Особую актуальность имеют при этом психологические аспекты работы с ЛПР [69], а также выбор языковых средств общения с ЛПР и экспертами [75, 78].

В качестве основной процедуры сравнения и оценивания альтернатив традиционно используются парные сравнения [53], позволяющие опираться на хорошо разработанный аппарат теории бинарных отношений. Ниже мы тоже будем опираться, в основном, на парные сравнения (и на возникающие в результате их проведения структуры предпочтений), однако, следуя [99], упомянем и другие возможные методы оценивания и сравнения:

— множественные сравнения;
— ранжирование;
— гиперупорядочения;
— векторы предпочтений;
— упорядоченные разбиения;
— классификации.

4. *Уровень формальных моделей.* Не определяя пока строго понятия модели решения ЗПР (см. гл. 2), отметим, что среди экстремальных моделей особую актуальность, как показывает практика, имеют модели дискретной оптимизации и оптимизационные задачи на графах. Такие модели могут возникать не только как средство формализации исходных задач, но и в рамках различных процедур, например при формировании групп экспертов, при формировании вопросов и обработке ответов ЛПР.

В тех случаях, когда целью сравнения альтернатив является выявление факта (и степени) превосходства одной альтернативы над другой, для описания возникающей структуры предпочтений естественно воспользоваться аппаратом теории ориентированных графов; если же сравнения проводятся с целью выявления факта (и степени) сходства альтернатив, то для описания соответствующей структуры сходства/различия может быть использован аппарат теории неориентированных графов. И в том и в другом случае аппроксимация построенной структуры может проводиться на базе подбора в том или ином смысле наилучшего (или ближайшего [100, 118]) графа из некоторого заданного класса. Выбор этого класса, как уже указывалось выше, определяется самой постановкой задачи принятия решения *). Формализация проблемы обработки структуры предпочтений приводит к различным комбинаторным оптимизационным задачам на графах, которые внешне могут быть очень схожи с классическими экстремальными проблемами теории графов, такими, как задача о покрытии, о расписании работ, об оптимальных маршрутах и т. п., однако сильно отличаются от них

*) В связи с тем, что данная книга посвящена, в основном, ЗПР типа 1—6, обработке структур сходства/различия и задаче 7 уделяется сравнительно мало внимания.

по существу. Такое отличие обусловлено, в первую очередь, тем, что модели аппроксимации структур предпочтений, помимо обычных, «неразрушающих» методов теории графов, существенно используют и такие «неклассические» операции, как, например, удаление, добавление или переориентация дуг, удаление или добавление вершин, а также стягивание контуров [17], приводящие к искажению исходной структуры предпочтений. При этом в ряде случаев может возникнуть вопрос о том, насколько велики вносимые искажения, от ответа на который зависит оценка правомерности произведенной аппроксимации.

Заметим, что аналогичная ситуация имеет место и в том случае, когда на множестве объектов с заданной структурой предпочтений рассматриваются традиционные задачи дискретной оптимизации (такие, например, как задачи о рюкзаке, об оптимальной упаковке, о назначениях и т. п.) [68, 74, 85, 93, 139]. Для таких задач не всегда целесообразно использовать методы решения близких задач дискретной оптимизации на графах, так как в этих последних структура графа отражает, как правило, технологические ограничения, которые не могут быть нарушены. Более удобным может оказаться путь решения, предусматривающий преобразование имеющейся структуры предпочтений в некоторую аппроксимирующую структуру, выбираемую в классе структур, для которого исходная оптимизационная проблема имеет решение.

5. *Алгоритмический уровень*. Отметим, что даже для одной конкретной модели может существовать целый ряд алгоритмов решения, обладающих совершенно различными характеристиками (например, по вычислительной сложности, по используемым ресурсам, по точности, по обоснованности результатов и т. п.). Поиск оптимального в смысле той или иной модели решения нередко бывает сопряжен с необходимостью решения сложной переборной проблемы, и для этого могут использоваться:

— различные схемы и варианты метода ветвей и границ;
— методы динамического программирования;
— методы целочисленного (в частности, булевского и псевдобулевского) линейного программирования;
— алгоритмы последовательного анализа вариантов;
— методы типа вектора спада;
— алгоритмы локальной оптимизации;
— всевозможные эвристические схемы и методы.

Выбор конкретного алгоритма зависит обычно как от типа задач, решаемых системой, так и от используемых моделей, имеющихся ресурсов, вкусов и предпочтений ЛПР и т. д.

6. *Программный уровень*. Смысл введения такого уровня достаточно очевиден; мы ограничимся лишь указанием на то, что один и тот же конкретный алгоритм может допускать совершенно различные программные реализации (в том числе и написанные на одном и том же алгоритмическом языке, и для одной и той же ЭВМ).

7. *Уровень ресурсов*. На этом уровне в качестве ресурсов можно рассматривать:

— вычислительные ресурсы (такие, как требуемое время работы и память вычислительных систем);

— трудозатраты экспертов;

— трудозатраты ЛПР;

— затраты на измерение характеристик альтернатив;

— затраты на организацию экспертизы и диалога с экспертами и ЛПР;

— затраты на проведение имитационного моделирования.

При построении процедур решения перечисленные ресурсы выступают в качестве лимитирующих факторов. Например, трудозатраты экспертов и затраты на проведение имитационного моделирования являются лимитирующим фактором в моделях из [107], трудозатраты ЛПР — в работе [147]. На практике трудозатраты ЛПР и экспертов на организацию экспертизы и диалога стремятся учесть и, по возможности, уменьшить уже при выборе общих процедур, на уровне 3° [46, 113].

Перейдем теперь к рассмотрению общей схемы решения ЗПР.

1.2. Общая схема решения задач принятия решений

В теории это выглядит очень просто.

Дж. К. Джером
(«Трое в одной лодке, не считая собаки»)

Накопленный практический опыт в области проблем принятия решений показывает, что нередко наиболее трудными и важными оказываются такие не относящиеся непосредственно к процессу решения аспекты этих проблем, как:

— введение экспертов и ЛПР в проблематику решаемых задач;

— формирование общего языка общения для различных групп экспертов и ЛПР;

— согласование мнений и взглядов различных групп экспертов и ЛПР;

— выявление истинных целей решения, постановки задачи.

Ниже, фактически отвлекаясь от этих аспектов, рассмотрим общую схему решения подобных проблем, представив ее в виде ряда последовательных этапов.

ЭТАП 1. Предварительный анализ и выявление проблем.

ЭТАП 2. Постановка задач.

ЭТАП 3. Получение исходных данных (измерение, оценивание).

ЭТАП 4. Обработка данных и решение конкретной задачи с привлечением математических методов и вычислительной техники, а также (при необходимости) экспертов и ЛПР.

ЭТАП 5. Анализ полученного решения.

Приведенный перечень этапов и их последующий анализ близки к схемам [23, 26, 52, 99, 128]. Дополнительно введен этап 1, который часто является определяющим. На этом этапе производятся следующие основные действия:

— выявление уровней рассмотрения, элементов и структуры системы (процесса), типов связей;

— выявление основных видов ресурсов и критериев качества функционирования;

— выявление подсистем, используемых ими ресурсов и критериев качества функционирования подсистем;

— выделение основных противоречий (проблем), узких мест и ресурсных ограничений.

Примерная схема этапов 2—5 приводится в табл. 1.1. Как подчеркивается в [107], процесс решения задачи может включать в себя неоднократное уточнение исходной постановки. На схеме табл. 1.1 в связи с этим допускаются переходы от этапа 5 к этапу 4 (для уточнения формальной постановки) и от этапов 4 и 5 к этапу 2 (для уточнения содержательной постановки). При решении задачи (этап 4), кроме того, может возникнуть необходимость в дополнительном измерении или оценке параметров (переход к этапу 3).

Особый интерес для наших целей представляют блоки 4.1 и 4.4, относящиеся к этапу 4. Планирование процесса решения задачи может заключаться в уточнении связи критериев, определении модели и механизма выбора [2, 26, 140, 143, 144].

Базисная концепция, отстаиваемая авторами, состоит в том, что в соответствии с приводимой схемой решения ЗПР, построение искомого решения может быть представлено как последовательно выполняемые преобразования исходной структуры предпочтений (или сходства/различия), результатом которых явится получение наилучшей (в том или ином смысле) структуры из некоторого класса, взаимно однозначно соответствующей искомому наилучшему решению. Выбор и анализ аппроксимирующего класса подразумевает формализацию задачи аппроксимации (преобразования) исходной структуры предпочтений в соответствии с данной постановкой задачи принятия решений, выбор количественного или качественного критерия оценки качества аппроксимации (или хотя бы анализ вопроса, какая аппроксимация должна считаться достаточно хорошей).

Формирование решения (блок 4.4) можно представить как процесс преобразования данных (структур), выделяя в общем случае следующие четыре уровня моделей данных:

— данные от экспертов и ЛПР (уровень 0);

— первичные аппроксимирующие структуры (уровень 1);

— структуры повторной аппроксимации (уровень 2);

— структуры дальнейшей аппроксимации (уровень 3).

Примерами структур уровня 0 (исходных структур предпочтений) могут служить орграфы произвольного вида (наличие контуров при этом отражает противоречивость исходных данных); уровня 1 — бесконтурные графы, деревья, параллельно-последовательные графы и т. п.; уровня 2 или 3 — графы линейного порядка. Таким образом, процесс формирования решения естественно представляется в виде цепочки этапов последовательного преобразования данных, в ходе которого исходная структура предпочтений последовательно

Таблица 1.1

Фрагмент схемы решения

ЭТАП 2

2.1. Содержательная постановка конкретной задачи. Определение типа задачи.
2.2. Формирование множества альтернатив.
2.3. Формирование множества критериев, разработка шкал.

ЭТАП 3

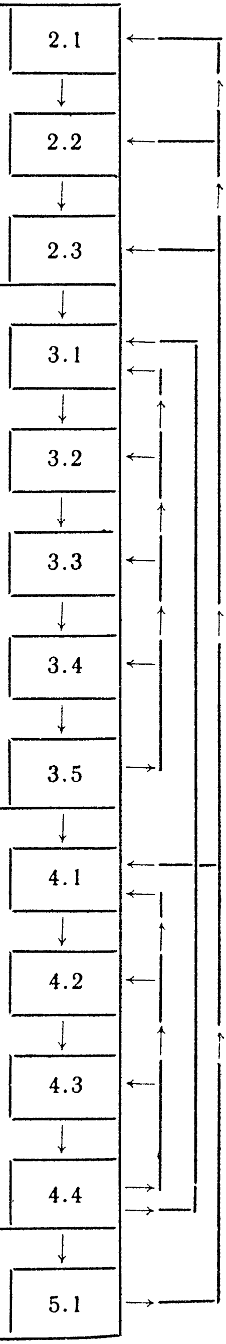
3.1. Измерение характеристик альтернатив (физическое измерение, имитационное моделирование).
3.2. Формирование цели экспертизы, разработка процедуры опроса.
3.3. Формирование группы экспертов.
3.4. Проведение опроса экспертов.
3.5. Анализ и обработка экспертных оценок.

ЭТАП 4

4.1. Планирование процесса решения задачи. Выбор и анализ аппроксимирующего класса.
4.2. Получение данных от ЛПР.
4.3. Анализ данных и выявление противоречий. Выбор и анализ формальных моделей.
4.4. Обработка данных (формирование решения).

ЭТАП 5

5.1. Анализ решения.



преобразуется в «близкие» или «хорошие» структуры требуемого класса. Выявлению типичных задач такого преобразования структур и посвящена оставшаяся часть данной главы.

Следует также отметить, что процесс преобразования структур вовсе не обязательно должен включать все четыре указанных уровня, но может быть прекращен на любом из них (в том числе и на уровне 0) по любой из следующих причин:

— полученной аппроксимирующей структуры (или исходной структуры) вполне достаточно для корректного решения задачи принятия решений, так что дальнейшая аппроксимация при помощи структур более специального вида не требуется;

— получаемая на очередном уровне аппроксимирующая структура слишком сильно отличается от исходной, так что дальнейшая аппроксимация неправомерна.

1.3. Базовые типы структур

> Лучше всего взять самое простое, самое обычное.
>
> *И. Ильф («Записные книжки»)*

Выбор типовых структур представления данных связан, с одной стороны, с процессом оценивания альтернатив ЛПР, а с другой стороны, с процессом обработки данных. С учетом первого процесса структуры обычно рассматривают в виде орграфов [118]. В большинстве работ преобразование графов предпочтений рассматривается в виде решения задач выявления и устранения противоречий (обычно выступающих в форме контуров), формирования упорядочения вершин, наилучшим образом отвечающего исходному графу, выявления подмножества наиболее предпочтительных вершин (альтернатив). В некоторых случаях при этом может производиться предварительное преобразование исходного орграфа, например, когда множество вершин распределяется по взаимно упорядоченным каким-либо образом слоям [16, 19, 46, 83, 116, 139], или же когда выявляется подмножество наиболее предпочтительных вершин [34, 38, 62].

Предполагая, что исходная структура предпочтений задана при помощи некоторого орграфа G самого общего вида *), введем в рассмотрение следующие базовые типы структур:

— произвольный орграф без контуров (частичный порядок) R, в том числе как частные случаи:

— граф линейного порядка (цепочка) C;

— звездный граф Z;

— упорядоченная структура P, порождаемая двухполюсным параллельно-последовательным графом;

---

*) Построение структуры предпочтений по имеющимся результатам парных сравнений строго описывается в гл. 2.

— граф древесного порядка T (в том числе граф T_1 с направлением дуг от корня и граф T_2 с направлением дуг к корню);
— слоистая структура S, в том числе как частные случаи:
— полный двудольный орграф без контуров K;
— структура S', верхние слои которой содержат по одному элементу.

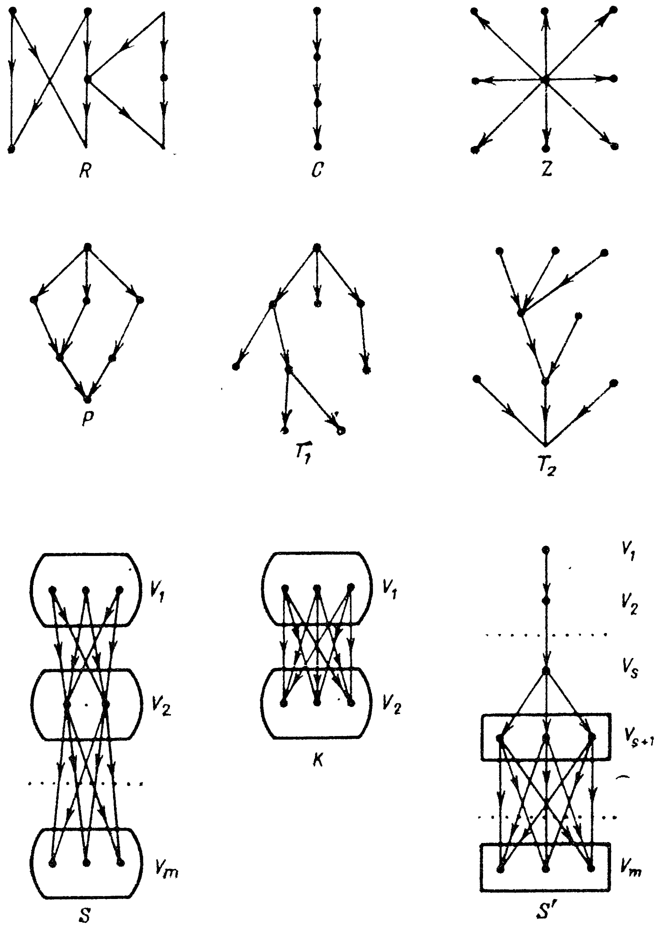


Рис. 1.1. Порождающие орграфы для базовых структур

В слоистых структурах множество вершин V разбито на непересекающиеся слои V_i, $i=\overline{1, m}$; $V=\bigcup\limits_i V_i$; $\forall(i\neq j) V_i \cap V_j=\varnothing$, причем предполагается, что любая вершина доминирует над всеми нижележащими слоями (доминирование может пониматься как в покомпонентном смысле [5], так и в групповом [19, 20]). При необходимости в слоистых структурах могут предусматриваться и дополнительные условия, регламентирующие отношения между элементами внутри слоев; так, для дальнейших приложений, описываемых в гл. 4, имеет смысл выделить слоистые структуры типа квазисерии, в которых дуги внутри слоев отсутствуют, и структуры промежуточного типа, в которых дуги внутри слоев могут быть любыми.

Введенные базовые структуры могут быть проиллюстрированы рис. 1.1, на котором для упрощения приведены соответствующие порождающие графы (транзитивные сокращения) для этих структур. Сами же базовые структуры могут быть получены взятием соответствующего транзитивного замыкания.

Кроме перечисленных базовых структур, практический интерес представляют и производные аппроксимирующие структуры, в том числе как состоящие из нескольких однотипных подграфов (далее обозначаемые NC, NT и т. п. *)), так и являющиеся объединением (или композицией) базовых структур различных типов. Подробный анализ производных аппроксимирующих структур выходит далеко за рамки настоящей работы.

Заметим, что при обработке структур сходства/различия тоже может быть применен аналогичный подход. Предполагая, что исходная структура представлена в виде неориентированного графа, можно выделить такие, например, базовые структуры, как клика Q, вполне несвязный граф W, производные структуры типа NQ, NW и т. п. Не предполагая подробно рассматривать задачу классификации, мы не будем здесь на них останавливаться, указав лишь, что такой подход в данной ситуации оказывается частным случаем значительно более общей теории разбиений со структурой [105].

1.4. Задачи преобразования структур

> Из гравюры предложили
> сделать пьесу.
>
> *И. Ильф («Записные книжки»)*

Итак, выглядит достаточно очевидным, что переход от исходной структуры предпочтений к некоторой базовой структуре определенного класса, аппроксимирующей исходную, фиксирует конкретное решение той или иной ЗПР. Так, переход к звездному графу однозначно определяет лучшую альтернативу, переход к слоистой структуре задает некоторое упорядоченное разбиение и т. д. Таким образом, в рамках предлагаемой концепции первостепенную важность при решении конкретной ЗПР приобретают следующие вопросы:

— выбор типа финальной аппроксиманты;

— определение пути достижения структуры требуемого типа;

— определение этапов последовательной аппроксимации в соответствии с избранным путем;

— формализация каждого этапа и определение соответствующих моделей.

---

*) Введение структуры типа NR не имеет смысла, так как подобная структура по определению имеет и тип R.

Таблица 1.2

Взаимосвязь задач принятия решений и используемых аппроксимирующих структур

Тип задачи	Промежуточные структуры	Финальные структуры
1	$R, T, P, S, S', NC, NT, NP, NZ$	C
2	$R, T, P, S, S', NC, NT, NP, NZ$	Z, S', C, T_1, P
3	$R, T, P, S, NC, NZ, NT, NP$	K
4	$R, T, P, S, S', NC, NT, NP, NZ$	S', C
5	R, T, P	R, T, P, NC, NT, NP, NZ
6	$R, T, P, S, NC, NT, NP, NZ$	S

Примерная взаимосвязь перечисленных структур и уровней аппроксимации для введенных выше типовых ЗПР иллюстрируется табл. 1.2, а возможные пути достижения той или иной финальной аппроксиманты сведены в общий рис. 1.2, обобщающий соответствующие схемы из [15, 16]. Направление стрелок указывает здесь возможные пути аппроксимации; звездочками помечены случаи,

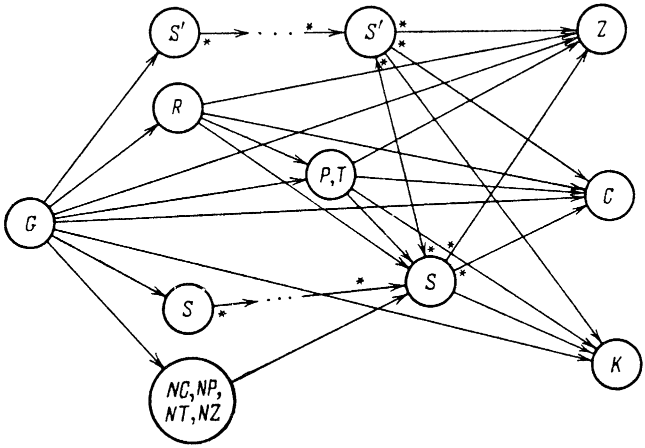


Рис. 1.2. Возможные пути последовательной аппроксимации

когда преобразованиям подвергается не вся структура предпочтений в целом, а лишь некоторые ее подграфы по отдельности.

Для выявления типовых задач преобразования графов рассмотрим подробнее схемы, представленные на рис. 1.2.

Для получения линейного упорядочения альтернатив (задача типа 1) возможны, например, следующие пути, каждый из которых, кроме того, естественным образом порождает лучшую альтернативу, упорядоченное подмножество лучших альтернатив и частичный порядок на множестве альтернатив (задачи типа 2, 4 и 5):

— непосредственное построение линейного упорядочения (преобразование вида $G \to C$);

— построение некоторого предварительного частичного порядка, т. е. устранение противоречий в исходной структуре (преобразования вида $G \to R$, $G \to T$, $G \to P$, $G \to R \to T$ или $G \to R \to P$) с последующей достройкой его до линейного порядка (преобразования вида $R \to C$, $T \to C$ или $P \to C$);

— построение линейного порядка по схеме последовательного выделения лидеров [163], предусматривающей выделение упорядоченного подмножества лучших альтернатив (преобразование вида $G \to S'$), затем аналогичную обработку оставшегося подмножества с добавлением в «хвост» формируемой цепочки нового фрагмента и т. д. *) до тех пор, пока не будет получено полное линейное упорядочение **);

— построение линейного порядка по некоторой предварительно полученной слоистой структуре, элементы каждого слоя которой упорядочиваются между собой (при помощи преобразований типа $G \to C$), а полученные фрагменты цепочки «склеиваются».

Такая структура, далее называемая стандартной, может быть получена как по построенному при первичной аппроксимации частичному порядку (преобразования вида $G \to R \to S$, $G \to T \to S$, $G \to NC \to S$ и т. п.), так и непосредственно (преобразованием вида $G \to S$). Возможна и схема последовательного расслоения, в ходе которой слои полученной при первичной аппроксимации структуры сами могут подвергаться дальнейшему расслоению (посредством преобразований вида $G \to S$) или объединению и т. д. (неоднократность и этой процедуры также подчеркивается разрывной линией на рис. 1.2). Особый интерес при этом представляет частный случай подобной схемы, когда на каждом этапе применяются только преобразования вида $G \to K$, т. е. обрабатываемый слой делится надвое (последовательная дихотомия ***).

Пути решения остальных типовых задач обнаруживают большое сходство с рассмотренными путями решения задачи о линейном упорядочении.

Так, упорядоченное подмножество лучших альтернатив (задача типа 4) может быть построено по схеме последовательного выделения лидеров или получено дополнительным расслоением верхнего

---

*) Неоднократность такой процедуры подчеркивается на рис. 1.2 тем, что соответствующий переход показан разрывной линией.

**) Вполне возможен и аналогичный подход, связанный с последовательным выделением упорядоченного подмножества не лучших, а худших альтернатив; здесь мы не останавливаемся на нем, так как сама задача выделения упорядоченного подмножества худших альтернатив представляет значительно меньший интерес.

***) Конкретные модели линейного упорядочения, базирующиеся на схемах последовательной дихотомии и последовательного выделения лидеров, приводятся ниже, в 3.2.

слоя (слоев) стандартной структуры (преобразования вида $G \to C$ или $G \to S'$).

Выделение лучшей альтернативы (задача типа 2) может быть достигнуто непосредственно (преобразованиями вида $G \to Z$, $G \to T_1$ или $G \to P$), при обработке предварительно полученного частичного порядка ($G \to R \to Z$, $G \to R \to T_1$ или $G \to R \to P$) или же дополнительной обработкой верхнего слоя стандартной слоистой структуры (преобразования вида $G \to Z$ или $G \to S'$).

Неупорядоченное множество лучших альтернатив (задача вида 3) также может быть построено непосредственно ($G \to K$) или обработкой стандартной структуры ($S \to K$); для построения упорядоченного разбиения альтернатив (задача типа 6) вполне достаточно просто построить соответствующую стандартную структуру; наконец, частичный порядок на множестве альтернатив (задача типа 5) достигается уже упомянутыми выше преобразованиями вида $G \to R$, $G \to T$, $G \to NC$ и т. п.

Анализ рис. 1.2 дает, таким образом, возможность выделить используемые типы структурных преобразований (их оказывается сравнительно немного) и сгруппировать их по уровням аппроксимации. Получаемые результаты сведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Типы структурных преобразований

Уровни аппроксимации		
1	2	3
$G \to R$, S, S', K, NC, NT, NP, NZ;	$G \to S$, S', K; $R \to S$, T, P; T, $P \to S$; NC, NT, NP; $NZ \to S$;	$G \to Z$, C, K; $S' \to K$; $S \to K$; R, T, $P \to K$, C, Z.

После определения пути последовательной аппроксимации (отметим здесь, кстати, что рис. 1.2, разумеется, не исчерпывает всех возможных путей; вполне возможны и иные пути, и некоторые из них реализуются в примерах из гл. 6) решаемая ЗПР разбивается на ряд локальных подзадач, каждая из которых отвечает отдельному этапу преобразований. Для реализации намеченных преобразований может использоваться следующий арсенал средств преобразования графов:

— удаление дуг;
— добавление дуг;
— переориентация (инверсия) дуг;
— удаление вершин с дугами;
— замена некоторого подграфа одной вершиной (стягивание, склеивание вершин);

— удаление вершин с заменой исключаемых дуг;
— удаление некоторого подграфа;
— удаление подграфа с заменой исключаемых дуг;
— добавление вершины с дугами;
— добавление некоторого подграфа;
— замена некоторой вершины подграфом (расщепление вершины).

Заметим, что, вообще говоря, удаление, добавление или стягивание вершин (а тем более, целых подграфов) представляются операциями, вносящими существенно более серьезные искажения в исходную структуру предпочтений, чем удаление, добавление или переориентация отдельных дуг [16]. В связи с этим ниже при анализе конкретных преобразований рассматриваются преимущественно такие способы их реализации, которые используют только операции с отдельными дугами.

При анализе конкретной задачи принятия решений после того, как путь аппроксимации выбран и выделены составляющие его преобразования, каждое из них формализуется в виде задачи поиска некоторой «наилучшей» (или просто «хорошей») структуры определенного вида, причем смысл, вкладываемый в понятие «наилучшей» («хорошей») аппроксимирующей структуры, и, соответственно, вид получаемой задачи комбинаторной оптимизации могут сильно варьироваться в зависимости от вида задачи принятия решения, конкретных особенностей альтернатив, вкусов ЛПР и экспертов и ряда других факторов. На практике под «наилучшей» обычно подразумевается:

— наиболее близкая структура данного типа;
— структура данного типа, обладающая некоторым свойством или такая, у которой это свойство проявляется наиболее ярко.

Более подробно эти вопросы будут освещены в следующей главе, здесь же мы в заключение рассмотрим некоторые аспекты реализации цепочки преобразований.

Достаточно очевидно, что выбор математических моделей (и даже конкретных алгоритмов) для реализации отдельных этапов цепочки должен производиться согласованно, с тем, чтобы принципы, используемые в каждой модели, не противоречили, а дополняли друг друга.

Поэтапная аппроксимация исходной структуры предпочтений имеет важное преимущество перед одномоментной, одношаговой аппроксимацией. В ходе ее реализации может оказаться, что поставленная исходная ЗПР неприемлема из-за противоречивости и несогласованности исходной информации, изменившихся мнений экспертов и ЛПР и т. п. В этом случае многошаговая аппроксимация открывает возможность гибкого изменения стратегии, текущей коррекции информации или замены исходной ЗПР на более слабую и менее обязывающую, уже решенную на предыдущих этапах. Примером такой замены может служить переход от задачи линейного упорядочения объектов к задаче их группового упорядочения.

Весьма существенную роль при этом призваны играть эксперты и, особенно, ЛПР, участие которых позволяет [16]:

— дополнить и/или скорректировать набор критериев, характеризующих качество альтернатив (объектов);

— уточнить шкалы критериев и устранить несоответствие шкал возможностям измерения;

— устранить ошибки при оценке решений по шкалам критериев и их последствий;

— уменьшить или устранить противоречивость информации о предпочтениях и пополнить эту информацию;

— оценить итоги решения очередной подзадачи и ответить на вопрос, не следует ли использовать для ее решения иную модель;

— оценить ход последовательной аппроксимации и принять оперативное решение о переходе к следующему этапу или, при необходимости, о смене стратегии (или остановке процесса), если полученная текущая аппроксиманта уже слишком далека от исходной структуры в том или ином смысле.

Диалог с ЛПР, обеспечивающий уточнение графа предпочтений, часто основывается на представлении ЛПР пар векторных оценок качества альтернатив. В ответ ЛПР высказывает свое мнение о предпочтительности одной из альтернатив, об их эквивалентности или несравнимости. Существенное значение при этом имеет и стратегия диалога (последовательность представления пар объектов). Так, в [79] диалог направлен на выявление реальных или фиктивных альтернатив, разделяющих исходное множество на два упорядоченных класса. Последовательное использование такого подхода возможно в рамках схемы последовательной дихотомии.

Таким образом, процесс решения задачи представляется цепочкой последовательных преобразований структуры предпочтений. На каждом этапе процедура преобразования включает диалог с ЛПР, выбор подходящей формальной модели, решение задачи комбинаторной оптимизации и, возможно, уточнение постановки задачи. В процессе решения задачи стратегия решения может корректироваться. Естественно, особую важность при этом приобретают вопросы эффективного построения стратегии.

Глава 2

ФОРМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Легко верится тому, что совпадает с нашими желаниями.

Дж. Локк
(«Опыт о человеческом разуме»)

В предыдущей главе, обрисовав вкратце основные уровни архитектуры интерактивных систем принятия решений, мы ограничились, в основном, анализом первых трех уровней: целевого, постановочного и процедурного. Перейдем теперь к анализу следующего уровня — уровня формальных моделей, обращая особое внимание на задачи дискретной оптимизации и экстремальные задачи на графах.

В настоящей главе рассматриваются основные требования и калибровочные ограничения, накладываемые на орграфы и матрицы парных сравнений, используемые для описания структур предпочтений. Далее строго определяется понятие формальной модели решения ЗПР и рассматриваются основные принципы, которые могут быть положены в основу таких моделей, и соответственно возникающие при этом типы моделей.

Последующие три главы будут посвящены моделям решения конкретных задач принятия решений (а именно задач о линейном упорядочении объектов, о групповом их упорядочении (стратификации) и о выделении подмножества лучших объектов). При этом развиваемые в настоящей главе идеи получат свое конкретное воплощение в соответствии с содержательными особенностями решаемых задач. Это позволит окончательно конкретизировать возникающие в рамках моделей дискретные оптимизационные проблемы и рассмотреть пути их решения (т. е. выйти на следующий, алгоритмический уровень).

2.1. Аппарат описания структур предпочтений

Если тебе известно нечто лучшее, предложи, если ж нет — воспользуйся этим.

Гораций («Послания»)

Как уже отмечалось в гл. 1, структура предпочтений, возникающая на множестве объектов в результате их парных сравнений, может быть описана как при помощи специальной матрицы парных сравнений, так и на языке теории графов. При определенных дополнительных предположениях оба способа описания оказываются эквивалентными.

Пусть задано некоторое фиксированное множество объектов $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$, которые сравниваются попарно с точки зрения их предпочтительности, желательности, важности и т. п., а результаты записываются в виде матрицы парных сравнений $A=\|a_{ij}\|_{n\times n}$, отражающей возникающее бинарное отношение предпочтения/безразличия на множестве X.

В том случае, когда парное сравнение выявляет лишь факт превосходства одного объекта над другим (или их равноценности), множеству X с введенным на нем отношением можно однозначно поставить в соответствие орграф $G=(V, U)$, множество вершин V которого отвечает множеству объектов X, дуга же из i в j проводится, если объект x_i превосходит x_j (т. е. $x_i \succ x_j$). Так вводимый орграф будет далее называться простой структурой предпочтений.

Если же результат сравнения отражает не только факт, но и степень (силу, интенсивность и т. п.) превосходства, то в аналогично вводимом орграфе G каждая дуга оказывается взвешена соответствующим элементом a_{ij} (взвешенная структура предпочтений).

И в том и в другом случае предполагается, что граф не содержит петель и кратных (параллельных) дуг.

Симметричные элементы матрицы парных сравнений a_{ij} и a_{ji} должны выбираться равными, если соответствующие объекты равноценны или несравнимы (далее мы не будем формально различать эти случаи, обозначая их одинаково $x_i \sim x_j$); если же $x_i \succ x_j$, то должно быть $a_{ij} > a_{ji}$. Кроме этих очевидных условий, на элементы матрицы A обычно накладываются дополнительные калибровочные ограничения, однозначно связывающие попарно симметричные элементы a_{ij} и a_{ji}. Рассмотрим основные типы таких калибровок.

1) *Простая структура* (ПС):

$$\forall i, j, \quad i \neq j \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \succ x_j; \\ 0, & \text{если } x_j \succ x_i; \\ 1/2, & \text{если } x_i \sim x_j. \end{cases} \tag{2.1}$$

Диагональные элементы при этом обычно не фиксируются и могут быть любыми, но нередко дополнительно оговаривается, что $\forall i \ a_{ii}=1/2$ (что позволяет считать ПС разновидностью упоминающейся далее турнирной калибровки).

Интерпретация: a_{ij} — индикатор факта превосходства одного объекта над другим или их равноценности (несравнимости).

2) *Турнирная калибровка* (Т):

$$\forall i, j \quad a_{ij} \geqslant 0; \quad a_{ij}+a_{ji}=c. \tag{2.2}$$

Интерпретация: a_{ij} — число очков, набранных игроком x_i во всех встречах с игроком x_j; число $c=\text{const}$ при этом может интерпретироваться как количество таких встреч. Нередко дополнительно постулируется целочисленность матрицы A.

3) *Степенная калибровка* (С):

$$\forall i, j \quad a_{ij} > 0; \quad a_{ij} \cdot a_{ji} = 1 \tag{2.3}$$

Интерпретация: объект x_i превосходит в парном сравнении объект x_j в a_{ij} раз.

4) *Кососимметрическая калибровка* (К):

$$\forall i, j \quad a_{ij} + a_{ji} = 0 \tag{2.4}$$

Интерпретация: объект x_i превосходит в парном сравнении объект x_j на a_{ij}.

5) Вероятностная калибровка (В):

$$\forall i, j \quad 0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1; \quad a_{ij} + a_{ji} = 1 \tag{2.5}$$

Интерпретация: a_{ij} — вероятность превосходства x_i над x_j. Другая возможная интерпретация возникает в том случае, когда на множестве X задается нечеткое отношение предпочтения. При этом произвольный элемент a_{ij} может трактоваться как степень принадлежности пары (x_i, x_j) к этому отношению (или как степень уверенности эксперта в том, что $x_i > x_j$). Вопрос о необходимости в этом случае калибрующего условия обратимости $a_{ij} + a_{ji} = 1$ обычно требует дополнительного содержательного анализа [71, 106, 108, 111].

При фиксации калибровочного условия типа (2.1)—(2.5) переход от матрицы парных сравнений A к орграфу $G = (V, U)$ становится взаимно однозначным. Для полноты анализа, помимо ука-

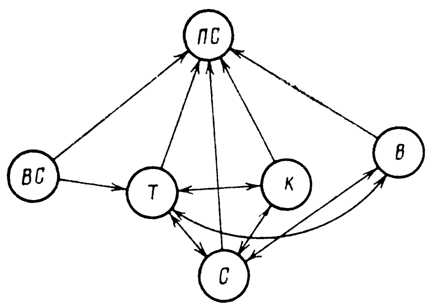


Рис. 2.1. Пути перехода к иным калибровкам матрицы

занных калибровок, включим в рассмотрение еще и произвольную *взвешенную структуру* (ВС), в рамках которой предполагается обычно только неотрицательность матрицы A, сами же ее элементы могут интерпретироваться по-разному, в частности, в духе турнирной калибровки (но с различным числом встреч между игроками). Для описания такой структуры более удобным, чем G, оказывается расширенный граф $G' = (V, U')$, в котором дуга (i, j), взвешенная числом a_{ij}, проводится тогда и только тогда, когда $a_{ij} > 0$. Также, как и G, расширенный граф G' не содержит кратных дуг, однако в нем могут встречаться петли и встречные (антипараллельные) дуги.

Заметим, что переход от матрицы A, заданной в некоторой калибровке, к откалиброванной по-иному матрице B возможен не всегда, но лишь при соблюдении некоторых дополнительных содержательных условий и нередко сопряжен с потерей важной информации. Так, переход от взвешенной структуры к простой, достигаемый заменой всех a_{ij} на $b_{ij}=[\text{sign}(a_{ij}-a_{ji})+1]/2$, оправдан лишь в тех случаях, когда информацией об интенсивности предпочтений можно пренебречь, учитывая лишь сам факт предпочтения. Переход от турнирной калибровки к кососимметрической достигается, например, заменой всех a_{ij} на $b_{ij}=a_{ij}-a_{ji}$; в то же время обратный переход требует выбора и фиксации некоторого значения константы c, что не всегда представляется удобным. Таким образом, вопрос о возможности перехода к матрице с другой калибровкой и о путях такого перехода всякий раз должен рассматриваться с учетом содержательных особенностей задачи. Схемы и направления подобных переходов и некоторые используемые при этом преобразования элементов матрицы приведены на рис. 2.1 и в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Реализация преобразований калибровки

Тип перехода от матрицы A к матрице B	Возможные способы реализации
ВС → Т	$b_{ij}=a_{ij}+(\max\limits_{i,j} s_{ij}-s_{ij})/2$;
	$b_{ij}=(a_{ij}\cdot\max\limits_{i,j} s_{ij})/s_{ij}$; $s_{ij}\triangleq a_{ij}+a_{ji}$;
Т → К	$b_{ij}=a_{ij}-a_{ji}$;
	$b_{ij}=(a_{ij}-a_{ji})/2$;
К → Т	$b_{ij}=a_{ij}(\text{sign}\, a_{ij}+1)/2+(\max\limits_{i,j} a_{ij}-\lvert a_{ij}\rvert)/2$;
	$b_{ij}=c(a_{ij}+\max\limits_{i,j} a_{ij})$; $c>0$; *)
К → С	$b_{ij}=r^{a_{ij}}$; $r>1$;
С → К	$b_{ij}=\log_r a_{ij}$; $r>1$;
В, Т → С	$b_{ij}=a_{ij}/a_{ji}$;
С → В, Т	$b_{ij}=a_{ij}/(1+a_{ij})$;
Т → В	$b_{ij}=a_{ij}/(a_{ij}+a_{ji})$;
В → Т	$b_{ij}=c\cdot a_{ij}$; $c>0$;
ВС, Т, В, К, С → ПС	$b_{ij}=[\text{sign}(a_{ij}-a_{ji})+1]/2$.

*) Константы c и r могут выбираться произвольным образом.

2.2. Моделирование процесса принятия решения

> Дайте-ка вспомнить, как это делается? Если не ошибаюсь, нужно что-то съесть или выпить. Только вот что?
>
> *Л. Кэрролл*
> *(«Алиса в Стране чудес»)*

Согласно общепринятым ныне представлениям, под математической моделью обычно понимается приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики [103, стб. 574]. При этом подчеркивается. что «анализ математических моделей позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений». Потребность в моделировании возникает в тех случаях, когда непосредственное исследование самого объекта (или процесса) невозможно. затруднительно, дорого, требует слишком длительного времени и т. д. [133].

В то же время, как отмечают Ю. А. Шрейдер и А. А. Шаров [145], понятие модели в современной науке стало настолько привычным. что сама потребность выяснения содержания этого понятия почти перестала осознаваться. На наш взгляд, именно такова ситуация, сложившаяся в настоящее время в современной теории принятия решений. Среди множества публикаций, в названиях которых появляются в том или ином контексте слова «модели принятия решений», невозможно отыскать работы, строго определяющие, что именно понимается под этим понятием. Подобное положение дел приводит к тому, что на практике понятия моделей, процедур, схем и методов принятия решений смешиваются и перестают отличаться одно от другого. Сами же модели принятия решений при этом неоправданно отождествляются с возникающими в их рамках комбинаторными задачами дискретной оптимизации и методами их решения.

Отметим прежде всего, что, на наш взгляд, неправомерно говорить о модели принятия решения вообще, безотносительно к типу решения, которое предстоит принять. Лишь после того, как выбрана и фиксирована конкретная ЗПР, которую предстоит решить, можно поставить вопрос о выборе той или иной модели. После того, как поставлена конкретная ЗПР, а значит, выбран класс базовых структур, в рамках которого будет осуществляться аппроксимация исходной структуры предпочтений, процесс принятия решения может быть интерпретирован как процесс выбора в том или ином смысле наилучших аппроксимант из данного класса, в основе которого лежат определенные принципы, предписывающие выбор именно тех или иных структур из этого класса. Очевидно, что достаточно полная модель процесса принятия решения должна отражать именно эти основополагающие принципы и что именно в их фиксации и состоит суть подобной модели. Различные модели решения одной и той же ЗПР будут при этом различаться именно принципами, положенными в их основу.

Итак, предположим, что рассматривается некоторое множество исходных структур предпочтений (и соответствующее множество $\hat{A}$ матриц парных сравнений) и исследуется определенная ЗПР, процесс решения которой, в соответствии с развиваемой концепцией, понимается как оптимальная аппроксимация исходной структуры структурами из некоторого базового класса Q. Тогда будем говорить, что на множестве исходных структур задана модель решения поставленной ЗПР, если указан некий принцип или правило, согласно которому произвольной матрице $A \in \hat{A}$ ставится в соответствие некоторое подмножество аппроксимант $\mathrm{Opt}(A) \subset Q$. Такое подмножество структур, осуществляющих оптимальную (с точки зрения данной модели) аппроксимацию исходной структуры, может быть задано явным способом или же, чаще, неявно, причем в последнем случае конкретные способы его построения в рамках одной и той же модели могут быть совершенно различны (на алгоритмическом уровне).

Фиксация принципа выбора оптимальных аппроксимант в этом обычном случае приводит к задаче построения множества $\mathrm{Opt}(A)$ (или хотя бы одного его элемента), которая представляет собой переборную задачу на классе структур Q и обычно формализуется в виде той или иной комбинаторной оптимизационной задачи. Для решения ее в рамках одной и той же модели могут использоваться самые разнообразные методы.

В общем случае, для произвольной матрицы A $|\mathrm{Opt}(A)| \geqslant 1$; однако в некоторых ситуациях процесс принятия решения допускает и такой исход, как отказ от принятия решения вообще (например, если выясняется, что избранная постановка ЗПР чересчур обременительна, так что следует перейти к другой постановке). Соответствующая модель должна также учитывать подобную возможность, что приводит к появлению в множестве исходных структур, таких, для которых $\mathrm{Opt}(A) = \varnothing$.

В свете вышеизложенного, становится достаточно ясной взаимосвязь моделей и процедур принятия решений. В рамках конкретной процедуры принятия решений, помимо всего прочего, могут производиться такие действия, как:

— выбор стратегии решения поставленной ЗПР (пути последовательной аппроксимации);

— расчленение ЗПР на подзадачи сообразно с избранной стратегией;

— выбор конкретной модели для каждой из подзадач (и соответствующих классов промежуточных аппроксимант);

— оценка и анализ результатов применения выбранных моделей;

— анализ вопроса о необходимости (возможности, желательности и т. п.) изменения стратегии решения или постановки ЗПР для данной исходной структуры на основании результатов применения конкретных моделей.

Таким образом, понятие «процедура» оказывается значительно более общим и широким, чем «модель», и включает в себя не только математические, но и организационные аспекты принятия решений.

На практике нередко полагают, что модель принятия решений имеет место уже тогда, когда предложена некоторая последовательность действий или операций, преобразующих (обычно, к тому же, не единственным образом) исходную структуру в какую-либо аппроксиманту из требуемого класса. На наш взгляд, в данном случае имеет место лишь схема принятия решения, говорить же о модели было бы методологически неправомерно. Отметим, кстати, что при использовании таких схем нередка ситуация, когда и решаемая ЗПР не определяется полностью, и совершенно не известно, к какому классу будет принадлежать получаемая в конце концов структура; в этих случаях логичнее было бы говорить даже не о схеме принятия решения, а всего лишь о схеме обработки исходной структуры предпочтений или исходной матрицы парных сравнений.

Действительно, принципы выбора той или иной аппроксиманты остаются невыясненными, совершенно неясно также, чем полученная структура лучше других структур того же типа (да и лучше ли она их вообще?); наконец, зачастую не исключено, что повторное применение той же схемы может привести к совсем иной аппроксиманте. Все сказанное, однако, совсем не отрицает возможности использования эвристических и полуэвристических схем в конкретных проблемах; более того, тщательный анализ и переработка используемых на практике схем, с экспликацией и четким определением лежащих в их основе правил, могут привести и к созданию новых моделей решения ЗПР.

Коснемся еще и вопроса о таких важных требованиях, предъявляемых к моделям принятия решений, как корректность, адекватность, полнота и универсальность. Под *корректностью* здесь и далее мы будем понимать математическую и формально-логическую непротиворечивость модели, невозможность получения в ее рамках бессмысленных, принципиально невозможных или противоречащих друг другу результатов. Так например, не может быть признана корректной модель, не обеспечивающая получения оптимальных аппроксимант требуемого класса или неявно определяющая множество оптимальных аппроксимант противоречивым образом, так что одна и та же структура оказывается одновременно и входящей, и не входящей в него, и т. д. Некорректность модели — крупнейший ее недостаток, исключающий (или, во всяком случае, чрезвычайно ограничивающий) ее практическое применение. Встречается подобное, однако, весьма редко, так как важность такого требования, как корректность, отчетливо осознается всеми исследователями и вновь разрабатываемые модели тщательно проверяются (тем более, что в большинстве случаев корректность той или иной модели достаточно очевидна).

Под *адекватностью* модели будем, в соответствии с общепринятыми представлениями [36, 145] понимать ее соответствие оригиналу, т. е. правильность отражения в ней моделируемых принципов и особенностей процесса принятия решения. Исследование адекватности той или иной конкретной модели обычно представляет собой трудную, неблагодарную задачу. Упомянем в этой связи о различиях между нормативным (прескриптивным) и дескриптивным подходами в теории принятия решений (см. например, [75, 77, 110, 128, 154] и др.). В рамках первого из них высказываются, в основном, априорные предположения о том, какими должны быть общие принципы принятия решения. Эти принципы формализуются в виде аксиом, которым и должны удовлетворять разрабатываемые модели. Такой подход привел к ряду серьезных достижений, в первую очередь, в русле аксиоматизации теории выбора [2].

В рамках дескриптивного подхода, с другой стороны, предпринимаются попытки формализовать ключевые моменты процесса принятия решения человеком, субъектом этого процесса. Аксиоматизация выглядит здесь малоперспективной, поскольку ЛПР обычно затрудняется эксплицировать и обобщить причины, по которым было принято то или иное решение; кроме того, язык, на котором такие формальные аксиомы могут быть изложены, нередко для ЛПР малопонятен, так что аксиомы не могут быть им содержательно интерпретированы. Более обещающим представляется иной путь, при котором особенности разрабатываемых моделей описываются не аксиоматически, а атрибутивно, при помощи системы свойств, каждое из которых содержательно интерпретируется ЛПР и представляется ему разумным и в той или иной мере желательным (т. е. отражает те принципы, которые лежат в основе процесса принятия решения), но в то же время достаточно легко формализуется. В диалоге с ЛПР выясняются наиболее желательные для него в данном случае свойства и выбирается модель, по возможности, наиболее полно ими обладающая.

Подобный атрибутивный подход позволяет проводить сравнительный анализ различных моделей решения одной и той же ЗПР и открывает пути к качественной оценке адекватности той или иной модели имеющемуся реальному процессу. В гл. 3 в рамках такого подхода приводится система свойств, пригодная для проведения сравнительного анализа моделей линейного упорядочения, и с ее позиций рассматривается целый ряд таких моделей; в гл. 4 эта система свойств обобщается и расширяется и для моделей группового упорядочения.

Требование *полноты* для моделей принятия решения также достаточно однозначно и заключается в том, что основные принципы, лежащие в основе принятия решения, должны отражаться не только достаточно точно, но и в достаточном объеме. В нормативных моделях это приводит к необходимости следить за тем, чтобы аксиомы рационального принятия решения достаточно полно описывали реальный процесс. В рамках же дескриптивного подхода (в описываемом атрибутивном варианте) вместо этого может возникнуть задача оценки того, насколько важны в конкретном случае те свойства, которыми модель не обладает, но которые желательны, по мнению ЛПР. И та и другая задачи теоретически почти не исследованы.

Наконец, под *универсальностью* модели будем, как обычно, понимать возможность ее применения к достаточно обширному классу исходных структур предпочтений. Как правило, ограничения на применение конкретных моделей связаны с числом объектов в исходной структуре, особенностями графов G или G', типом калибровки исходной матрицы и т. п. Возможность использования той или иной модели должна, в связи с этим, в конкретных случаях проверяться. В дальнейшем, при анализе используемых на практике моделей мы будем особо оговаривать области их применения, фиксируя требуемый тип калибровки, а также, при необходимости, и иные ограничения на обрабатываемую исходную структуру предпочтений.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых типов формальных моделей и возникающих при этом оптимизационных задач.

2.3. Стандартные типы формальных моделей

Все стандартное было когда-то дьявольски оригинальным.

Ц. Меламед («Спрессованные строки»)

Несмотря на огромное разнообразие используемых на практике моделей решения ЗПР, «разумных» принципов, лежащих в их основе, вовсе не так много, что позволяет до некоторой степени классифицировать модели на основе этих базовых принципов. Здесь мы кратко охарактеризуем общую, «скелетную» часть моделей, относящихся к тому или иному классу, имея в виду, что при анализе конкретной ЗПР такой «скелет» детализируется и конкретизируется сообразно с особенностями задачи, что и приводит к построению соответствующей модели (или даже семейства моделей, различающихся значениями тех или иных параметров) и формулировке конкретной оптимизационной проблемы.

Отметим, в первую очередь, большую группу моделей, которые условно назовем *моделями оценки объектов*. В таких моделях по итогам обработки исходной матрицы парных сравнений каждому объекту ставится в соответствие его интегральная оценка в некоторой порядковой (реже количественной) шкале, скалярная или (реже) векторная, которая призвана отразить некую итоговую «ценность», «важность» или «силу» объекта в данной структуре предпочтений. Требуемая аппроксимирующая структура строится по таким оценкам непосредственно или с использованием вспомогательных (обычно эмпирических) правил, служащих для ее дополнительного уточнения.

Модели оценки объектов получили чрезвычайно широкое распространение (особенно в спорте, где в качестве такой оценки объекта-игрока по итогам турнира обычно используется просто сумма набранных очков — подробнее см. п. 3.2.1), что объясняется относительной простотой этих моделей и быстротой получения результатов. Особенно часто подобные модели применяются для решения задачи линейного упорядочения объектов, и соответствующие конкретные их разновидности подробно описаны в 3.2. В то же время адекватность подобных моделей зачастую весьма сомнительна, поскольку принципиальная возможность построения интегральных оценок объектов далеко не бесспорна, да и обоснование большинства способов построения таких оценок оставляет желать лучшего.

В противовес подобным моделям возможен и иной подход, предусматривающий оценку не объектов, а отдельных структур из требуемого класса и в явном виде рассматривающий проблему поиска «наилучших» (или просто «хороших») аппроксимант. На практике под «наилучшей» («хорошей») обычно понимается:

— наиболее (достаточно) близкая структура данного типа;

— структура данного типа, в наибольшей (достаточной) степени обладающая некоторым свойством.

И в том и в другом случае на искомую «наилучшую» («хорошую») структуру могут быть наложены и дополнительные ограничения специального вида (например, на число и мощность слоев, число лучших объектов и т. п.). В первом случае (встречающемся чаще при обработке простых структур предпочтений), на множестве структур вводится метрика $\rho(x, y)$ и рассматривается задача поиска наилучшей аппроксиманты:

$$\rho(x, y) \to \min_{y \in Y}, \tag{2.6}$$

где x — аппроксимируемая структура, а Y — множество аппроксимант требуемого типа (или же подмножество таких структур, удовлетворяющих имеющимся ограничениям). Чаще всего используется обычная метрика хеммингова типа, записываемая в матричном виде, как

$$\rho(A^{(1)}, A^{(2)}) \triangleq \alpha \sum_{i \neq j} |a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(2)}|, \tag{2.7}$$

где $a_{ij}^{(1)}$ и $a_{ij}^{(2)}$ — элементы квадратных матриц $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ соответственно, а α — масштабный коэффициент [65], но могут применяться и другие метрики [119].

Особо отметим, что использование задачи вида (2.6) позволяет оценить величину искажений, вносимых в исходную структуру. В качестве такой оценки может быть выбрано само расстояние до ближайшей аппроксиманты, что представляется серьезным доводом в пользу применения моделей такого рода.

Во втором случае (представляющем собой некоторое обобщение первого и встречающемся как в простых, так и во взвешенных структурах) на множестве Y (или соответствующем его подмножестве) вводится некоторый функционал $\Phi(y)$, оценивающий желательные свойства той или иной структуры, и для отыскания наилучшей аппроксиманты ставится задача

$$\Phi(y) \to \max_{y \in Y}. \tag{2.8}$$

Для поиска не обязательно наилучших, а просто «достаточно хороших» аппроксимант вместо (2.6) и (2.8) могут быть поставлены родственные, но более слабые задачи о поиске структуры $y \in Y$, находящейся не дальше определенного порога или обладающей значением $\Phi(y)$, превосходящим определенный порог. Далее мы не будем останавливаться на этих задачах, сосредоточив внимание на отыскании наилучших аппроксимант.

2.3.1. Модели максимального согласования. Интуитивно ясное понятие «структуры, максимально согласованной с исходной», может, тем не менее, быть формализовано двумя различными путями. В первом случае (максимальное совпадение) имеется в виду структура требуемого вида, в максимальной степени сохраняющая дуги исходной структуры; во втором (минимальное рассогласование) — структура, общий вес несовпадений которой с исходной минимален.

Пусть исходная структура предпочтений задана в виде взвешенного орграфа $G=(V, U)$ и соответствующей матрицы парных сравнений A. Следуя [13, 15], назовем произвольную структуру $L=(V, U_L)$ согласованной (частично совпадающей) с G, если веса ее дуг l_{ij} выбраны следующим образом:

$-\forall (i, j) \in U_L \cap U \quad l_{ij}=a_{ij};$
$-\forall (i, j) \in U_L \setminus U \quad l_{ij}=0.$

Таким образом, согласованная структура L может быть получена из исходной за счет удаления произвольных дуг и добавления дуг нулевого веса. Суммарный вес оставленных (совпадающих) дуг может использоваться, как оценка сходства структур L и G. Заметим здесь, что для любой структуры L_0, отличающейся от L разве что весами дуг, верно

$$\rho(G, L_0) \geq \rho(G, L) = \sum_{(i, j) \in U \setminus U_L} a_{ij}, \tag{2.9}$$

где метрика понимается в смысле (2.7), а, следовательно, для произвольной структуры L_0 найдется отличающаяся от нее разве что весами отдельных дуг (т. е. относящаяся к тому же классу) согласованная с G структура L, лежащая к G ближе, нежели L_0. Тем самым верна следующая несложная

Лемма 2.1. *Ближайшая к G структура произвольного класса Q всегда согласована с G и может быть получена за счет только удаления дуг и добавления дуг нулевого веса.*

Тем самым, задача (2.6) о поиске ближайшей аппроксиманты в классе Q переходит в задачу о поиске максимально совпадающей структуры данного вида:

$$\sum_{(i, j) \in U \cap U_L} a_{ij} \to \max_{L \in Q_G}, \tag{2.10}$$

где $Q_G \subset Q$ — множество согласованных с G структур требуемого вида.

Коль скоро оценкой согласованности исходной структуры G и аппроксиманты L служит суммарный вес совпадающих дуг, суммарный вес удаленных из G для получения L дуг может интерпретироваться как оценка различия (рассогласованности) между G и L. Каждая дуга, подлежащая удалению в процессе аппроксимации, при этом сигнализирует о некотором элементарном несогласии между исходной и аппроксимирующей структурами, так что суммарный вес таких дуг должен быть, по возможности, меньшим. Пусть (i, j) — одна из таких дуг, сигнализирующая об имеющем место элементарном несогласии. Очевидно, что при учете таких дуг следует различать две, вообще говоря, различных ситуации: когда в аппроксиманте вообще не должно быть дуги между i и j (например, при попадании этих вершин в разные ветви дерева или в один слой структуры типа квазисерии и т. п.) и когда в аппроксиманте должна быть дуга (j, i). Вполне логично предположить, что несогласие второго типа должно считаться более тяжелым и вес его при вычислении общей оценки следует учитывать с некоторым дополнительным коэффициентом, обычно принимаемым равным 2. Поиск минимально рассогласованной аппроксиманты при этом требует решения задачи вида

$$\sum_{(i, j) \in U \setminus U_L} a_{ij} + \sum_{(i, j) \in U_L \setminus U} a_{ji} \to \min_{L \in Q_G}. \tag{2.11}$$

Задача вида (2.11) тоже может быть поставлена, как задача о поиске ближайшей аппроксиманты (2.6). Рассмотрим множество $R_G \subset Q$, состоящее из структур $M = (V, U_M)$, веса дуг которых m_{ij} удовлетворяют условию

$$\forall (i, j) \in U_m \begin{cases} (i, j) \in U \Rightarrow m_{ij} = a_{ij}, \\ (j, i) \in U \Rightarrow m_{ij} = a_{ji}, \end{cases}$$

(т. е. в структуре M, если вместо $(i, j) \in U$ проводится дуга (j, i), то вес ее выбирается не нулевым, а тем же). Тогда задача (2.11), как легко видеть, вполне эквивалентна задаче $\rho(G, M) \to \min\limits_{M \in R_G}$ в том смысле, что получаемые структуры L и M связаны взаимно однозначно, различаясь лишь весами дуг.

Отметим еще, что в тех случаях, когда проведение дуг нулевого веса запрещено (например, при обработке простых структур, когда итоговая аппроксиманта также является простой), возникает еще один вид элементарных несогласий: если в исходной структуре дуг между i и j не было, а в аппроксиманте одна из этих дуг проведена. Такое элементарное несогласие не отличается от несогласия первого типа и также должно учитываться с коэффициентом 1. При обработке простых структур задача вида (2.10) теряет самостоятельный смысл (так как множество Q_G не может быть определено), а задача вида (2.11) переходит в (2.6) при $Y = Q$. Ряд смежных вопросов, касающихся оценки рассогласованности графов и связанных с удалением и проведением дуг, рассмотрен в работах Г. Ш. Фридмана [136—138].

Итак, в общем случае, возможно два подхода к построению моделей максимального согласования, приводящих к оптимизационным задачам вида (2.10) и (2.11). В то же время, если тип искомой аппроксиманты таков, что несогласия первого типа исключены (ибо любые две вершины соединены дугой), что имеет место в задаче линейного упорядочения, рассматриваемой в следующей главе, то эти подходы совпадают и приводят к одной и той же модели (см. п. 3.2.6), так как задачи (2.10) и (2.11) при этом эквивалентны.

2.3.2. Модели неравномерной аппроксимации. Рассмотренные выше модели максимального согласования характерны тем, что при анализе сходства (или различия) между исходной структурой и аппроксимантой всем дугам уделялось одинаковое внимание, вне зависимости от расположения соединяемых ими вершин. В свете этого, логично назвать такие модели моделями равномерной аппроксимации и рассмотреть противоположную концепцию, предполагающую, что не все дуги аппроксиманты равнозначны в этом смысле (неравномерная аппроксимация), так что некоторым из них уделяется особое внимание.

Здесь возможны два альтернативных подхода, ориентированных на использование диаметрально противоположных идей. В первом из них постулируется, что чем дальше друг от друга в аппроксиманте отстоят вершины, соединяемые друг с другом данной дугой, тем более важно, чтобы эта дуга в аппроксиманте и в исходной структуре совпадала (и тем более тяжелым признается соответствующее элементарное несогласие). В противоположном подходе, напротив, важность таких «дальних связей» игнорируется и основное внимание уделяется совпадению в аппроксиманте и в исходной структуре «ближних связей» (т. е. дуг, соединяющих соседние в аппроксиманте объекты).

Введем для произвольной пары вершин (i, j) симметричную функцию расстояния вдоль данной аппроксимирующей структуры $d(i, j)$, полагая, что при отсутствии в ней дуг (i, j) и (j, i) $d(i, j)=0$, а в противном случае:

а) в порядковых структурах (R, C, T и т. д.) $d(i, j)$ равно длине наибольшего ориентированного пути, соединяющего i и j;

б) в слоистых структурах $d(i, j)$ равно модулю разности номеров страт, в которых находятся i и j.

При помощи введенной функции $d(i, j)$ модель дальних связей может быть записана в следующем виде, обобщающем (2.10):

$$\sum_{(i,j)\in U\cap U_L} a_{ij}\varphi(d(i, j)) \to \max_{L\in Q_G}, \tag{2.12}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная монотонно возрастающая функция. Аналогично обобщается и (2.11):

$$\sum_{(i,j)\in U\setminus U_L} a_{ij}\varphi(d(i, j)) + \sum_{(i,j)\in U_L\setminus U} a_{ji}\varphi(d(i, j)) \to \min_{L\in Q_G}. \tag{2.13}$$

В простейшем случае $\varphi(d(i, j))\equiv d(i, j)$ (модель линейных дальних связей), и несогласия первого типа не учитываются вовсе (ибо расстояние между соответствующими вершинами в аппроксиманте равно нулю). Поэтому задачи (2.12) и (2.13) становятся эквивалентными и переходят в

$$\sum_{(i,\, j) \in U \cap U_L} a_{ij} d(i,\, j) \to \max_{L \in Q_G}. \tag{2.14}$$

Конкретный вид задачи (2.14) для некоторых ЗПР будет рассмотрен в 3.2, 4.3.

Модель ближних связей также может быть формализована на основе введенной функции расстояния $d(i,\, j)$. При этом целесообразно уже не различать несогласия первого и второго типа, тогда (2.10) обобщается в виде:

$$\sum_{(i,\, j) \in U \cap U_L} a_{ij} \psi(d(i,\, j)) \to \max_{L \in Q_G} \tag{2.15}$$

где $\psi(x)$ — монотонно убывающая функция. Вообще говоря, можно выбрать $\psi(x) = [\varphi(x+1)]^{-1}$ или $\psi(x) = c - \varphi(x)$, где c — некоторая константа (например, $c = \max\limits_{i,\, j} d(i,\, j)$), однако гораздо чаще в качестве $\psi(x)$ выбирается так называемая «функция сцепления»:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 1, \\ 0 \text{ в противоположном случае} \end{cases} \tag{2.16}$$

при использовании которой единственно важными считаются дуги, соединяющие соседние в аппроксиманте вершины (т. е. такие дуги, которые входят не только в аппроксиманту, но и в соответствующий порождающий граф). Задача (2.14) с функцией сцепления (2.16) известна как задача о наиболее сцепленной аппроксиманте. Частные ее виды рассматриваются ниже, в 3.2, 4.3.

2.3.3. Минимаксные модели аппроксимации. Во всех рассмотренных выше моделях типа (2.8), предполагающих максимизацию показателя согласованности исходной и аппроксимирующей структур (или минимизацию показателя их рассогласованности), в качестве соответствующих оценок выступали взвешенные суммы вкладов отдельных совпадающих (или несовпадающих) дуг. Другой возможностью является оценка рассогласованности структур по максимальному весу несовпадающей дуги, что приводит к так называемым минимаксным моделям *).

Соответствующие оптимизационные задачи могут быть получены из (2.11), (2.14) и (2.15). Так, считая, что всем дугам аппроксиманты уделяется равное внимание, получим вместо (2.11) минимаксную постановку:

$$\max_{(i,\, j) \in U \setminus U_L} a_{ij} \to \min_{L \in Q_G}. \tag{2.17}$$

В рамках подхода, предполагающего примат дальних связей над ближними, вместо (2.13) — (2.14) может быть получена

*) В принципе, согласованность структур также можно оценивать по максимальному (или минимальному) весу совпадающей дуги, но так возникающие максимаксные (или максиминные) модели не выглядят достаточно адекватными.

минимаксная модель с линейными дальними связями:

$$\max_{(i,\, j) \in U \setminus U_L} a_{ij} d(i,\, j) \to \min_{L \in Q_G}. \qquad (2.18)$$

Наконец, предполагая примат ближних связей над дальними, можно вместо (2.15) получить минимаксную модель ближних связей

$$\max_{(i,\, j) \in U \setminus U_L} a_{ij} \psi(d(i,\, j)) \to \min_{L \in Q_G}, \qquad (2.19)$$

которая с учетом (2.16) переходит в минимаксную постановку задачи о наиболее сцепленной аппроксиманте.

Некоторые конкретные виды минимаксных моделей (2.17)—(2.19) рассматриваются ниже, в 3.2, 4.3. Здесь же мы в заключение отметим, что использование таких моделей оправдано лишь в тех случаях, когда спектр значений элементов a_{ij} достаточно широк (в частности, использование их для обработки простых структур выглядит совершенно бессмысленным), поскольку в противном случае множество оптимальных аппроксимант рискует оказаться слишком обширным. Несколько подробнее этот вопрос рассмотрен в п. 3.2.8 применительно к минимаксной модели линейного упорядочения типа (2.17).

Глава 3

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

Не нам, господа, подражать Плинию.
Наше дело выравнивать линию.

Козьма Прутков («Военные афоризмы»)

Переходя к обсуждению моделей и методов решения конкретных видов ЗПР, рассмотрим в первую очередь проблему линейного упорядочения объектов, традиционно находящуюся в центре внимания исследователей. В связи с обилием конкретных приложений и несомненной актуальностью темы число работ, посвященных вопросам построения оптимальных в том или ином смысле линейных порядков на множестве сравниваемых объектов, чрезвычайно велико (ограничимся здесь лишь ссылкой на обобщающие работы [23, 25, 26, 53, 75, 99, 105]). В то же время, существующие работы ориентированы, в основном, на разработку и анализ конкретных моделей линейного упорядочения *) и исследование связанных с их формализацией дискретных оптимизационных задач. В настоящее же время, когда уже накоплено достаточно большое число различных моделей упорядочения, особую важность и актуальность приобретает вопрос о том, какая же из них должна быть выбрана и использована в том или ином конкретном случае.

В настоящей главе предпринимается попытка сравнительного анализа существующих моделей упорядочения. Подобный анализ может, в принципе, базироваться на выделении некоторой системы полезных и легко интерпретируемых свойств, которыми должна обладать «разумно» сконструированная модель упорядочения, и исследовании имеющихся моделей с точки зрения обладания выделенными свойствами. Результаты подобного исследования могут быть использованы при разработке реальных систем поддержки принятия решений (СППР) и дают возможность в каждой конкретной ситуации, выбрав те свойства, выполнение которых представляется необходимым или наиболее желательным, применить модель, обладающую именно ими.

Ниже предлагается система, содержащая 12 естественных, содержательно интерпретируемых свойств «разумных» моделей, впервые сформулированная в [12] и пополненная в [14], и на ее основе дается краткий обзор и сравнительный анализ целого ряда используемых на практике моделей. Отметим здесь, что выделяемые свойства не должны считаться аксиомами: выполнение их лишь желательно, но далеко не обязательно. Содержательно подобная расплыв-

*) Далее в этой главе вместо «линейное упорядочение» будет говориться просто «упорядочение».

чатость может быть обусловлена тем, что само понятие «разумной» модели, определяемое с позиций здравого смысла, не может быть строго формализовано. Как явствует из приводимых ниже результатов, многие достаточно «разумные» и широко применяемые на практике модели, хорошо зарекомендовавшие себя при решении конкретных задач, не обладают теми или иными естественно интерпретируемыми и вполне желательными свойствами. Это может восприниматься и как дополнительное подтверждение того интуитивно понятного факта, что построение линейного упорядочения требует, вообще говоря, внесения достаточно больших искажений в исходную структуру предпочтений, а поэтому оптимальные упорядочения, отвечающие различным «разумным» моделям, могут оказаться весьма и весьма различными *).

Предлагаемые в данной главе свойства моделей линейного упорядочения далее будут видоизменены и пополнены для характеристики моделей группового упорядочения. Пути сравнительного анализа таких моделей намечаются в следующей главе.

Произвольное линейное упорядочение объектов из X далее будем записывать в виде кортежа из их номеров $I=(i_1, \ldots, i_n)$, обозначая через $N_m(I)$ номер места объекта x_m в упорядочении I. Множество всевозможных упорядочений (перестановок) над X обозначим I^*; $|I^*|=n!$. Коль скоро задана матрица парных сравнений и некоторая модель упорядочения, множество оптимальных с ее точки зрения упорядочений будет обозначаться $I^*_{\text{opt}}(A)$; $|I^*_{\text{opt}}(A)|\geqslant 1$.

3.1. Свойства моделей линейного упорядочения

Свойство зеркальце имело:
говорить оно умело.

А. С. Пушкин

В настоящем разделе предлагается система желательных и легко интерпретируемых свойств, которыми, в принципе, должны обладать «разумно» сконструированные модели линейного упорядочения. Поскольку любая модель, как выше отмечалось, задает однозначное соответствие между произвольной матрицей парных сравнений A и подмножеством оптимальных упорядочений $I^*_{\text{opt}}(A)$, большинство предлагаемых свойств формулируется в виде неких требований, предъявляемых к получаемым в произвольном случае оптимальным упорядочениям.

3.1.1. Преобразования исходной матрицы и связанные с ними свойства моделей. Рассмотрим в первую очередь возможные изменения множества $I^*_{\text{opt}}(A)$ в зависимости от допустимых изменений исходной матрицы парных сравнений A, обращая особое внимание

---

*) Таким образом, ситуация, имеющая место в данной проблеме, кардинально отлична от той, что возникает в проблеме выбора лучшего объекта (или группы лучших), в которой понятие «разумного», рационального выбора допускает четкую аксиоматизацию (см., например, [2]).

на инвариантность этого множества относительно определенных стандартных преобразований *).

Свойство 1. *Инвариантность к растяжению* (ИР). Умножение всех элементов A на положительную константу не изменяет оптимальных упорядочений:

$$\forall k > 0 \quad I^*_{\text{opt}}(A) = I^*_{\text{opt}}(kA). \tag{3.1}$$

Свойство 2. *Инвариантность к сдвигу* (ИС). Замена всех элементов a_{ij} на $a_{ij}+b$, где b — произвольная положительная константа, не влияет на множество оптимальных упорядочений:

$$\forall b > 0 \quad I^*_{\text{opt}}(A) = I^*_{\text{opt}}(A + \|b\|_{n\times n}). \tag{3.2}$$

Свойство 3. *Транспонируемость* (Т). Замена всех предпочтений на «прямо противоположные», т. е. инверсия всех дуг в структуре предпочтений, должна приводить к тотальной инверсии оптимальных упорядочений:

$$\forall I \in I^* \quad I \in I^*_{\text{opt}}(A) \Leftrightarrow I^T \in I^*_{\text{opt}}(A^T), \tag{3.3}$$

где A^T — транспонированная матрица парных сравнений, описывающая инвертированную структуру предпочтений, а I^T — зеркально инвертированное упорядочение I (если $I = (i_1, \ldots, i_n)$, то $I^T = (i_n, \ldots, i_1)$).

Свойство 4. *Устойчивость «в малом»* (УМ). Достаточно малые допустимые изменения матрицы A должны сохранять оптимальность хотя бы одного элемента из $I^*_{\text{opt}}(A)$, что может быть формально записано, например, в виде

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in A^* \quad \|B - A\| < \varepsilon \Rightarrow I^*_{\text{opt}}(B) \subseteq I^*_{\text{opt}}(A), \tag{3.4}$$

где A^* — множество матриц с заданной калибровкой. Используемая норма при этом может быть произвольной, а калибровка исходной матрицы A — любой, кроме ПС (для простых структур достаточно малые ε-окрестности A пусты).

Смысл вводимого свойства УМ достаточно прозрачен. Поскольку для произвольного упорядочения I в A^* всегда можно выделить подмножество $A^*(I)$ матриц, для которых I является оптимальным с точки зрения рассматриваемой модели, все множество A^* покрывается $n!$ такими пересекающимися подмножествами. Наличие свойства УМ при этом гарантирует своеобразную «компактность» таких подмножеств: если матрица A является внутренней точкой некоторого подмножества, то она входит в него вместе с достаточно малой своей окрестностью; если же A лежит на границе нескольких подмножеств, то любая допустимая матрица из малой ее окрестности заведомо входит хотя бы в одно из них.

Заметим, что гарантировать сохранение оптимальности всех элементов $I^*_{\text{opt}}(A)$, в общем случае, невозможно: если для некоторой матрицы A имеется сразу несколько оптимальных упорядоче-

---

*) Здесь и далее под допустимыми изменениями будут пониматься изменения, не искажающие калибровки исходной матрицы.

ний, то даже малые допустимые изменения в A могут привести к тому, что некоторые из них окажутся лучше прочих.

Свойство 5. *Положительная реакция* (ПР). Изменение результата отдельного парного сравнения между x_i и x_j в пользу x_i не должно приводить к ухудшению места, занимаемого объектом x_i в оптимальном упорядочении: если $I \in I^*_{\text{opt}}(A)$ и матрица B отличается от A разве что элементами b_{ij} и b_{ji}, причем $b_{ij} \geqslant a_{ij}$ и $b_{ji} \leqslant a_{ji}$, то найдется такое $I' \in I^*_{\text{opt}}(B)$, что $N_i(I') \leqslant N_i(I)$.

Несложно видеть прямую аналогию этого свойства с известной одноименной аксиомой рационального выбора [2, 33].

Естественность введенных свойств 1—5, доходящая почти до тривиальности, не должна вводить в заблуждение: выполнение их отнюдь не гарантируется для целого ряда используемых на практике моделей упорядочения.

3.1.2. Доминирование и сегментируемость. Ряд следующих свойств связан с доминированием объектов в исходной структуре предпочтений.

Свойство 6. *Сохранение доминирования* (СД). Будем говорить, что объект x_i *строго доминирует* над объектом x_j в данной структуре предпочтений (обозначая это $x_i \gg x_j$), если во всех парных сравнениях объект x_i проявляет себя хотя бы не хуже, чем x_j, и хотя бы в одном — строго лучше:

$$x_i \gg x_j \Leftrightarrow \forall t \notin \{i,\ j\} \quad (a_{it} \geqslant a_{jt};\ a_{ti} \leqslant a_{tj}); \quad a_{ij} \geqslant a_{ji},$$

причем хотя бы одно из этих неравенств — строгое.

Очевидно, что «разумная» модель линейного упорядочения должна в подобном случае помещать доминирующий объект выше подчиненного, т. е. сохранять доминирование.

Доминирование назовем *полностью сохраняющимся*, если для любой пары $x_i \gg x_j$ можно гарантировать, что в любом оптимальном упорядочении x_i предшествует x_j:

$$x_i \gg x_j \Rightarrow \forall I \in I^*_{\text{opt}}(A) \quad N_i(I) < N_j(I), \tag{3.5}$$

и *сохраняющимся частично*, если подобное выражение гарантировать не для всех, но хотя бы для некоторых оптимальных упорядочений

$$I \in I^*_{\text{opt}}(A).$$

Легко прослеживается связь такого свойства с векторным доминированием альтернатив в теории принятия решений при многих критериях [26, 38, 76, 80, 120, 128].

Свойство СД также выглядит весьма естественным и желательным, так что отсутствие его у той или иной модели следует считать серьезным недостатком.

Свойство 7. *Сегментируемость по бикомпонентам* (СБ). Если структура предпочтений $G = (V,\ U)$ не является сильно связным орграфом, то в ней можно выделить отдельные бикомпоненты (компоненты сильной связности), которые оказываются односторонне связанными между собой. Пусть $V_1,\ \ldots,\ V_m$ — множества вершин, относящихся к различным бикомпонентам, тогда несложно видеть, что они могут быть пронумерованы так, чтобы дуги из бикомпонент с бо́льшими номерами в бикомпоненты с меньшими номерами отсутствовали. При этом естественно заключить, что объекты бикомпоненты с меньшим номером в целом предпочтительнее объектов из бикомпоненты с большим номером и в оптимальном упорядочении должны им предшествовать.

Следуя [9], введем понятие G-канонического упорядочения, имея в виду такое упорядочение, в котором ни один объект, относящийся к бикомпоненте с большим номером, не предшествует объектам из бикомпонент с меньшими номерами. Модель допускает сегментацию по бикомпонентам, если для любой матрицы A в множестве $I^*_{\text{opt}}(A)$ заведомо найдется хотя бы одно G-каноническое оптимальное упорядочение.

Практический смысл такого свойства совершенно очевиден. Если применяемая модель им обладает, то в случае, когда граф G не сильно связен, отдельные его бикомпоненты (и соответствующие им подматрицы) можно рассмотреть по отдельности, что существенно снижает размерность задачи. Вместе с тем, само свойство оказывается чрезвычайно сильным и выполняется достаточно редко.

В ряде случаев вместо G удобно бывает ввести в рассмотрение расширенный граф $G'=(V, U')$, в котором дуга (i, j) проводится, если $a_{ij}>0$. Определяя по аналогии понятие G'-канонического упорядочения, можно ослабить свойство сегментируемости, подразумевая под слабой сегментируемостью гарантированное наличие в $I^*_{\text{opt}}(A)$ хотя бы одного G'-канонического упорядочения. Поскольку в общем случае G — частичный граф в G', ясно, что сегментируемость влечет за собой слабую сегментируемость, но не наоборот.

Интересное следствие из свойства СБ связано с аппроксимацией бесконтурных структур предпочтений. Такая структура сама задает некоторое линейное упорядочение (возможно, не единственное, если сама она достаточно разрежена), которое мы будем называть первичным. Вполне естественно при этом задаться вопросом, всегда ли такое первичное упорядочение (или хотя бы одно из них) является оптимальным. Модель, гарантирующую это, далее будем называть *консервативной*.

Хотя смысл введенного свойства консервативности вполне ясен, обладание им не является ни недостатком, ни достоинством модели. С одной стороны, наличие такого свойства прямо указывает, что оптимальное упорядочение (первичное) согласовано с исходной структурой в смысле, вкладываемом в термин «согласование» в гл. 2, так что вносимые искажения сведены к минимуму, что следует признать полезным. Вместе с тем, при применении консервативной модели к бесконтурным структурам веса дуг полностью игнорируются, ибо первичное упорядочение зависит лишь от ориентации дуг. В некоторых случаях это может оказаться весьма обременительным.

Чтобы проиллюстрировать последний тезис, рассмотрим полную структуру (турнир) без контуров, в котором первый игрок победил всех остальных с очень небольшим преимуществом; второй же, проиграв немного первому, с подавляющим перевесом победил остальных. Консервативная модель поставит в этом случае на первое место первого игрока, а второго — следом за ним; однако в практических приложениях правильность такого решения далеко не бесспорна. Таким образом, если при обработке простых структур консервативность модели представляется весьма полезным свойством, то для взвешенных структур это не так очевидно и сильно зависит от конкретного вида обрабатываемой структуры.

Легко видеть, что при наличии у модели свойства СБ консервативность обеспечивается автоматически. Действительно, если структура не содержит контуров, то все бикомпоненты одноэлементны и каноническими являются только первичные упорядочения (любое из них). В то же время, консервативность представляется гораздо более слабым свойством, чем СБ, и может встречаться и при его отсутствии.

3.1.3. Кусочная оптимальность и локальные перестановки. Рассмотрим теперь несколько сильных свойств, связанных с перемещением некоторых объектов в оптимальном упорядочении.

Аналогично известному свойству наследования, вводимому для функций выбора [2], можно назвать модель линейного упорядочения удовлетворяющей условию наследования, если для произвольного $I \in I^*_{\mathrm{opt}}(A)$ упорядочение $\tilde{I}$, получаемое из I при удалении некоторого подмножества объектов, будет оптимальным для соответствующей матрицы $\tilde{A}$, получаемой из A при вычеркивании этих строк и столбцов. Легко заметить, однако, что ни одна «разумная» модель такому условию удовлетворять не может. Действительно, пусть структура предпочтений G содержит элементарный трехзвенный контур, тогда в любом упорядочении (а значит, и в оптимальном) найдется пара таких объектов $x_i \succ x_j$, что x_j предшествует x_i. Вычеркнем из оптимального упорядочения все объекты, кроме этих двух, тогда оставшаяся структура содержит единственное предпочтение $x_i \succ x_j$, а условие наследования требует упорядочить эти объекты прямо противоположным образом, что никак не может быть признано разумным.

Несколько ослабив условие наследования, назовем оптимальное упорядочение кусочно-оптимальным, если отбрасывание произвольного количества объектов с самого начала или с самого конца его сохраняет оптимальность оставшегося фрагмента, т. е. произвольный связный фрагмент $I_{rt} = (i_r, \ldots, i_t)$ оптимального упорядочения $I = (i_1, \ldots, i_r, \ldots, i_t, \ldots, i_n)$ сам является оптимальным для соответствующей подматрицы.

Свойство 8. *Кусочная оптимальность* (КО). Для любой матрицы парных сравнений A любое упорядочение $I \in I^*_{\mathrm{opt}}(A)$ кусочно-оптимально.

Само по себе свойство КО довольно сильно и в полном объеме встречается редко, хотя реальные модели, обладающие им, существуют (и будут рассмотрены далее). Поэтому на практике имеет смысл говорить и о частичном его выполнении, имея в виду модели, гарантирующие оптимальность не любых связных фрагментов, но лишь некоторых, удовлетворяющих определенным дополнительным условиям.

Рассмотрим еще одно свойство, тесно связанное с кусочной оптимальностью. Следуя [19, 20], введем на множестве X отношение группового доминирования $\succcurlyeq$, определив

$$\forall Y \subset X \quad \forall x_i \notin Y \quad x_i \succcurlyeq Y \Leftrightarrow \sum_{x_j \in Y} (a_{ij} - a_{ji}) \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, объект x_i доминирует над группой Y, если баланс его парных сравнений с объектами из этой группы неотрицателен. Заметим, что введение такого отношения осмысленно не при любой калибровке матрицы A (например, при калибровке типа С понятие баланса парных сравнений, видимо, теряет смысл).

Упорядочение $I = (i_1, \ldots, i_n)$ (не обязательно оптимальное) назовем *локально-сбалансированным*, если любой объект в нем доминирует в смысле (3.6) над любой непосредственно следующей за ним группой:

$$\forall s, t\colon 1 \leqslant s < t \leqslant n \quad x_{i_s} \succcurlyeq \{x_{i_j} \mid j = \overline{s+1,\ t}\}. \tag{3.7}$$

Свойство 9. *Локальная сбалансированность* (ЛС). Любое оптимальное линейное упорядочение должно быть локально-сбалансированным.

Аналогично свойству кусочной оптимальности, для данного свойства также имеет смысл говорить о частичном его выполнении для тех случаев, когда (3.7) выполняется не для любой группы, а при некоторых дополнительных условиях *).

Упомянем еще одно важное следствие из свойств КО или ЛС. Если произвольное упорядочение является локально-сбалансированным или кусочно-оптимальным, то для двух соседних в нем объектов x_{i_t} и $x_{i_{t+1}}$ обязательно выполняется $x_{i_t} \succcurlyeq x_{i_{t+1}}$, т. е. в парных сравнениях ни один объект не превосходит своего непосредственного предшественника (отсюда сразу вытекает, что неконсервативная модель свойствами КО и ЛС не обладает). Если же в структуре предпочтений нет равноценных (несравнимых) объектов, то имеет место $\forall t \quad x_{i_t} \succ x_{i_{t+1}}$, так что любое кусочно-оптимальное или локально-сбалансированное упорядочение определяет некоторый гамильтонов путь в структуре предпочтений G. Впрочем, такое следствие имеет и самостоятельный интерес и может иметь место и в тех случаях, когда сами свойства КО и ЛС не выполняются.

---

*) Исторически свойства КО и ЛС впервые, по-видимому, были выделены И. Ф. Шахновым и исследовались одним из авторов под его руководством для модели максимального согласования (рассматриваемой ниже), для которой оба свойства справедливы. Свойство ЛС для этой модели имеет дополнительный смысл, означая, по сути, что в локально-сбалансированном упорядочении невозможно улучшение оценивающего его качество функционала за счет единичных перемещений объектов, так что такое упорядочение оказывается локально-оптимальным в смысле [114]. Далее этот вопрос предполагается рассмотреть подробнее.

3.1.4. Прочие свойства моделей упорядочения. Рассмотрим в заключение еще ряд свойств моделей линейного упорядочения объектов.

С в о й с т в о 10. *Возможность получения количественных оценок важности объектов* (ОВО). Построение линейного упорядочения объектов представляет собой не что иное, как получение глобальных оценок их «важности» (ценности, предпочтительности, силы и т. п.) не друг относительно друга, а в некоей единой порядковой шкале. Во многих случаях, особенно при обработке взвешенных структур, когда интенсивность предпочтений задана количественно, интерес представляют и количественные оценки важности, так что возможность их получения в рамках некоторой модели следует считать полезным и ценным свойством.

В тех случаях, когда множество $I^*_{\text{opt}}(A)$ не одноэлементно, возникает и вопрос о том, насколько сходны между собой различные оптимальные упорядочения. Для исследования его, в принципе, возможно ввести некоторую метрику на множестве I^* и проанализировать, насколько далеки друг от друга различные элементы $I^*_{\text{opt}}(A)$. Здесь же мы рассмотрим иной подход к определению понятия сходства.

Пусть заданы произвольные линейное упорядочение объектов I и групповое упорядочение (упорядоченное разбиение) Φ. Будем говорить, что Φ порождает I, если объекты внутри страт (слоев) Φ могут быть дополнительно упорядочены между собой так, что после «склеивания» соответствующих фрагментов возникает линейное упорядочение I. Линейное упорядочение в этом случае, естественно, назвать порожденным, а соответствующее упорядоченное разбиение Φ — порождающим. Аналогично, произвольную модель линейного упорядочения $\mathcal{M}_I$ будем считать порожденной некоторой моделью группового упорядочения $\mathcal{M}_\Phi$, если для любого линейного упорядочения I, оптимального с точки зрения $\mathcal{M}_I$, найдется порождающее упорядоченное разбиение Φ, оптимальное с точки зрения $\mathcal{M}_\Phi$; саму модель $\mathcal{M}_\Phi$ при этом естественно назвать порождающей.

Два линейных упорядочения I_1 и I_2 назовем сходно порожденными, если для них найдется нетривиальное (т. е. имеющее более одной страты) общее порождающее упорядоченное разбиение (вообще говоря, не обязательно единственное). Таким образом, в сходно порожденных упорядочениях I_1 и I_2 выделяются такие связные фрагменты, что переход от I_1 к I_2 и обратно осуществляется только за счет перестановок объектов внутри фрагментов, перемещения же самих фрагментов друг относительно друга не производится.

С в о й с т в о 11. *Сходство различных оптимальных упорядочений* (СУ): если $I^*_{\text{opt}}(A) \neq I^*$, то все оптимальные упорядочения — попарно сходно порожденные, и все порождаются одним и тем же упорядоченным разбиением.

Смысл вводимого свойства достаточно очевиден. Интерпретируя построение линейного упорядочения как аппроксимацию исходной структуры предпочтений линейным порядком (а следовательно, внесение в нее некоторых искажений), можно заключить, что наличие сразу нескольких оптимальных линейных упорядочений служит косвенным указанием на то, что вносимые искажения слишком велики (т. е. имевшегося в структуре «внутреннего порядка» недостаточно для линейного упорядочения).

В этих условиях естественным выглядит рассмотреть проблему менее обременительной аппроксимации исходной структуры при помощи слоистой структуры, приводящую к задаче о наилучшем групповом упорядочении объектов, причем, если модель линейного упорядочения обладает свойством СУ, то в качестве такого наилучшего группового упорядочения естественно принять порождающее упорядоченное разбиение (и соответствующую ему слоистую структуру). Особенно выпукло это проявляется в тех обычных случаях, когда не только все оптимальные упорядочения порождены одним и тем же упорядоченным разбиением, но и, более того, все упорядочения, им порожденные, оптимальны, что ясно свидетельствует о том, что нет оснований предпочитать одно порожденное линейное упорядочение другим, а стало быть, взамен задачи о линейном упорядочении, должна быть поставлена менее жесткая задача о групповом упорядочении объектов. В свете изложенной в предыдущих главах стратегии последовательной аппроксимации такой шаг представляется обычным возвратом на один (или несколько) этапов назад, вполне оправданным в тех ситуациях, когда реализация очередного звена в цепи аппроксимаций выглядит недостаточно обоснованной.

Свойство 12. *Возможность оценки качества аппроксимации* (ОКА). В практических приложениях, помимо поиска оптимального упорядочения, нередко весьма важным оказывается возможность сравнить два различных упорядочения, аппроксимирующих исходную структуру по-разному. Если в рамках некоторой модели оказывается возможным естественным образом количественно оценить качество аппроксимации исходной структуры произвольным упорядочением (тем самым оптимальным оказывается упорядочение, получающее самую высокую оценку), то это позволяет дать ответ на вопрос, насколько одно упорядочение лучше другого, а в тех случаях, когда поиск оптимума слишком сложен и трудоемок,— рассмотреть вопрос о субоптимальных или приближенных решениях.

Особый интерес при этом представляют случаи, когда помимо оценки качества аппроксимации, в рамках модели удается построить и оценку величины вносимых в исходную структуру искажений. Наличие такой оценки позволило бы не только определить оптимальное упорядочение, но и выяснить, оправдана ли вообще аппроксимация исходной структуры линейным порядком или же надлежит прервать реализацию цепочки преобразований на более ранних этапах. Несколько подробнее этот вопрос рассмотрен в п. 3.2.6.

3.2. Конкретные модели и их свойства

> Ваш старый пылесос — это очень хороший прибор, но вы, наверное, заметили, что вместе с пылью он высасывает часть вашего ковра.
>
> *И. Ильф («Записные книжки»)*

Опираясь на предложенную выше систему свойств, можно провести сравнительный анализ целого ряда широко используемых конкретных моделей упорядочения, результаты которого приводятся в табл. 3.1.

Отметим предварительно, что используемые в практике модели линейного упорядочения традиционно разделяются на две большие группы, различающиеся своим подходом к решению задачи упорядочения объектов [12, 16]. В моделях первой группы, тяготеющих к статистическим методам обработки матриц парных сравнений, каждому объекту x_i сопоставляется определенный интегральный показатель π_i, оценивающий итоги его сравнений с остальными объектами, а далее объекты просто упорядочиваются по убыванию значений этого ранжирующего фактора. Если же сразу несколько объектов имеют одинаковые показатели, то для их упорядочивания могут использоваться дополнительные (лексикографически подчиненные) факторы, либо в оптимальное упорядочение допускается включение этих объектов в любой последовательности — и тем самым возникает несколько оптимальных сходно порожденных упорядочений. Каких-либо оценок качества аппроксимации при этом не предусматривается, зато сами значения ранжирующего показателя могут в некоторых случаях выступать в роли количественных оценок важности объектов.

В моделях второй группы, использующих комбинаторно-логические и теоретико-графовые методы, оцениваются показатели не отдельных объектов, а всего упорядочения в целом, и выбирается упорядочение, максимизирующее некоторый функционал качества аппроксимации (т. е. решение задачи вида (2.8)) или обладающее определенными желательными свойствами. Оценок важности при этом обычно не дается, и сходство различных оптимальных упорядочений не гарантируется, зато свойство ОКА обычно имеет место.

Условность такого разделения достаточно очевидна, поскольку для произвольной модели первого типа соответствующие оптимальные упорядочения (без учета дополнительных показателей) являются решениями оптимизационной задачи

$$\sum_{t=1}^{n} \pi_{i_t} \cdot t \to \max_{I \in I^*},$$

относящейся к тому же типу, что и (2.8); однако на практике такое разделение весьма удобно, и в дальнейшем мы предполагаем его придерживаться. Предлагаемый анализ, в основном, следует предшествующим работам авторов [12, 14, 16], отличаясь от них расширением набора рассматриваемых моделей.

Таблица 3.1

<table>
<tr><th>Свойства модели</th><th>Тип калибровки</th><th>ИР</th><th>ИС</th><th>Г</th><th>УМ</th><th>ПР</th><th>СД</th><th>СБ</th><th>КО</th><th>ЛС</th><th>ОВО</th><th>СУ</th><th>ОКА</th></tr>
<tr><td>Турнирная</td><td rowspan="3">ПС, Т, К</td><td rowspan="7">+*</td><td rowspan="3">+*</td><td rowspan="4">+*</td><td rowspan="2">+*</td><td rowspan="2">+</td><td>+</td><td rowspan="9">слабая</td><td>−</td><td>−</td><td rowspan="4">−</td><td rowspan="9">+</td><td rowspan="9">−</td></tr>
<tr><td>ПВЛ</td><td rowspan="2">+*</td><td>част.</td><td>част.</td></tr>
<tr><td>ПД</td><td>−</td><td>−</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="7">−</td></tr>
<tr><td>ИСП</td><td>К</td><td>−</td><td rowspan="6">+*</td><td rowspan="3">+</td><td rowspan="6">+</td></tr>
<tr><td>ФД</td><td>В, Т, К, С</td><td rowspan="2">+*</td><td>−</td><td rowspan="5">+</td></tr>
<tr><td>БТ</td><td>ПС**, Т**</td><td>+*</td></tr>
<tr><td>БББ</td><td>ПС, Т, С</td><td rowspan="3">−</td><td>−</td><td>+★</td><td rowspan="2">част.</td></tr>
<tr><td>СУ</td><td>С, В</td><td>−</td><td>−★</td><td rowspan="4">+</td></tr>
<tr><td>РС</td><td>Т⊗, С</td><td>+*</td><td>+*</td><td>−</td></tr>
<tr><td>МС/ЛМС</td><td>ПС, К, Т, ВС</td><td rowspan="4">+</td><td rowspan="4">+</td><td rowspan="4">+</td><td rowspan="4">+</td><td>част.</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td rowspan="5">−</td><td rowspan="5">−</td><td rowspan="3">+</td></tr>
<tr><td>ЛДС</td><td rowspan="2">ПС, К, Т, ВС*</td><td>+</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="5">−</td><td rowspan="5">−</td></tr>
<tr><td>БС</td><td rowspan="2">−</td><td>−</td></tr>
<tr><td>ММ</td><td>Т, К, В, С, ВС</td><td rowspan="3">част.</td><td rowspan="2">+</td><td>+★</td></tr>
<tr><td>БРК</td><td>В</td><td>−</td><td rowspan="2">−</td><td rowspan="2">+*</td><td rowspan="2">+*</td><td rowspan="2">+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>ПМ</td><td>ВС</td><td>+*</td><td>сл.</td><td>+</td><td>сл.</td><td>−</td></tr>
</table>

* — в случаях, когда оптимальное упорядочение не является выделенным; ** — для целочисленных матриц; ★ — требует дополнительного исследования; ⊗ — для положительных матриц.

3.2.1. Модели «спортивного» типа. Как уже отмечалось в гл. 2, такое название исторически укоренилось за целой группой сходных моделей, в которых в качестве ранжирующего фактора используется набранная объектом «сумма очков», в простейшем случае имеющая вид

$$\forall i = \overline{1,\ n} \quad s_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}. \tag{3.8}$$

В наиболее распространенной *турнирной* модели объекты непосредственно упорядочиваются по убыванию таких строчных сумм. Сама обрабатываемая матрица A при этом может иметь калибровку типа Т или ПС, а поскольку свойства инвариантности очевидным образом выполняются, модель пригодна и для кососимметрической калибровки.

Использование же ее для произвольных взвешенных структур представляется недостаточно обоснованным. Если игроки провели разное количество встреч, то набранные ими очки не отражают их реальной силы. Чтобы как-то выправить положение, матрицу A обычно формально приводят к турнирной калибровке, используя один из путей, приведенных в табл. 2.1, что встречает два серьезных возражения:

а) такой подход допустим далеко не всегда, но лишь при выполнении некоторых дополнительных свойств (например, для первого из путей табл. 2.1 — специального, и весьма сильного, свойства калибровочной инвариантности, рассматриваемого ниже в рамках модели максимального согласования), которыми турнирная модель, в общем случае, не обладает;

б) нет никаких оснований предпочитать первый из путей второму или наоборот (возможны, кстати, и другие пути перехода); между тем, эти пути приводят к совершенно различным турнирным матрицам и разным оптимальным упорядочениям.

Анализ ряда проблем, связанных с применением различных спортивных моделей к произвольным взвешенным структурам, дан в работах [53, 122, 157, 170] и др.

Широкая распространенность и популярность турнирной модели объясняется ее исключительной простотой и легкостью получения оптимального упорядочения. В тех случаях, когда несколько объектов имеют одинаковые суммы очков, используются дополнительные ранжирующие показатели (типа «числа побед», «числа крупных побед», «коэффициента Бергера» и пр.), обеспечивающие единственность оптимального упорядочения (далее такое выделенное по дополнительным показателям оптимальное упорядочение будет называться просто «выделенным»), либо, значительно реже, допускается их включение в упорядочение в произвольном порядке (случай «дележа мест» здесь не рассматривается, ибо фактически при этом имеет место уже упоминавшаяся замена задачи: вместо линейного упорядочения строится групповое). Легко видеть, что турнирная модель обладает положительной реакцией, слабой сегментируемостью по бикомпонентам и полностью сохраняет доминирование, а свойствами КО, ЛС, ОКА не обладает. В тех случаях, когда $|I^*_{\text{opt}}(A)|>1$, все оптимальные упорядочения оказываются сходно порожденными, выполнение же свойств ИР, ИС, УМ и Т гарантируется лишь в тех случаях, когда оптимальное упорядочение не является выделенным. Действительно, если в оптимальном выделенном упорядочении объект x_i предшествует x_j только по дополнительным показателям, то и для матрицы A^T x_i также может по тем же показателям предшествовать x_j (нарушение свойства Т); равенство же $s_i=s_j$ при сколь угодно малых изменениях в исходной матрице A может перейти в $s_i<s_j$ (нарушение свойства УМ) *).

В общем случае, турнирная модель не является консервативной, однако для простых структур свойство консервативности, разумеется, имеет место в случае, когда исходная структура полна (т. е. не содержит равноценных или несравнимых элементов, так что любые две вершины соединены дугой); в том же случае, когда некоторые дуги в структуре отсутствуют, гарантировать его выполнение не удается.

Возможности вычисления каких-либо количественных оценок важности объектов турнирная модель не предполагает. Использование в качестве таковых строчных сумм (3.8) даже для простых структур представляется спорным.

В качестве естественной альтернативы турнирной модели, осуществляющей прямое, одноэтапное построение упорядочения, можно предложить целый ряд многоступенчатых спортивных моделей, из которых, в первую очередь, следует упомянуть модель *последовательного вычленения лидеров* (ПВЛ). Термин ПВЛ широко используется для схем, в которых предусматривается выделение лучших объектов, затем лучших среди оставшихся и т. д., сами же подобные схемы восходят еще к Льюсу [163].

Итак, в качестве лучшего выбирается объект с наилучшей суммой, помещаемый на первое место в строящемся упорядочении (возможен вариант, когда выделяются сразу несколько лидеров, которым отводится несколько первых мест), далее соответствующие столбец и строка из матрицы A вычеркиваются, строчные суммы пересчитываются, вновь выбирается лидер и т. д. (стратегия $G \to S' \to \ldots \to S' \to C$).

По основным свойствам модель ПВЛ от турнирной не отличается. однако если оптимальное упорядочение — выделенное, то гарантировать сохранение доминирования нельзя. В то же время если $I=(i_1, \ldots, i_n) \in I^*_{\text{opt}}(A)$, то и фрагменты $(i_2, \ldots, i_n)$, $(i_3, \ldots, i_n)$ и т. д. также оптимальны для соответствующих подматриц, так что КО частично выполняется. Частично выполняется и свойство ЛС, ибо

$$\forall m=\overline{1, n-1} \quad x_{i_m} \geqslant \{x_{i_t} \mid t=\overline{m+1, n}\}, \tag{3.9}$$

*) Далее для моделей первой группы то, что свойства ИР, ИС, Т и УМ заведомо не гарантируются в случае выделенных оптимальных упорядочений, особо оговариваться не будет, так как это верно для всех моделей такого типа. Нарушение свойств ИР и ИС возможно при использовании дополнительных показателей типа «число крупных побед» и т. п.

т. е. любой объект доминирует над следующим за ним «хвостом».

В спортивной практике нередко используются и другие многоступенчатые процедуры построения упорядочения. Не касаясь здесь разнообразных систем, не предусматривающих сравнение всех пар объектов (типа «олимпийской», «схевенингенской» и пр.), некоторые из которых описаны в [122], а другие — в специальной спортивной литературе, обратим внимание на достаточно распространенную схему последовательного расслоения, при котором множество X вначале разбивается на линейно упорядоченные между собой слои, далее каждый слой сам подвергается подобному расслоению и т. д. (стратегия $G \to S \to \ldots \to S \to C$). Особый интерес, как уже отмечалось, при этом представляет схема *последовательной дихотомии* (ПД), в ходе которой исследуемый слой всякий раз делится надвое, полученные «лучшая» и «худшая» части вновь дробятся надвое и т. д. [16, 120].

В спортивной модели ПД к «лучшим» обычно относятся объекты с бо́льшими строчными суммами в соответствующей подматрице; при этом либо мощность подмножества лучших фиксируется, либо в него заносятся объекты, суммы очков которых превышают некий пороговый уровень. И тот и другой варианты по своим свойствам мало отличаются от остальных моделей спортивного типа, однако не обладают свойствами УМ и ПР, что следует считать крупным недостатком.

В справедливости этого утверждения убедиться нетрудно. Действительно, в первом варианте модели обычна ситуация, когда отбор объектов в «лучшую» часть производится по дополнительным показателям (дележ «выходящих мест»); но малейшие допустимые изменения в исходной матрице при этом могут такую ситуацию нарушить и привести к отбору совсем иных претендентов, так что устойчивость в малом очевидным образом отсутствует. Во втором варианте к аналогичному выводу приводит анализ ситуации, в которой сумма очков объекта равна пороговому уровню. В то же время и для первого, и для второго варианта модели вполне реальна ситуация, когда изменение в пользу x_i результата его сравнения с x_j приводит к тому, что x_j ранее попадавший в «лучшую» часть, перестает туда попадать (или заменяется на x_k), что плохо сказывается на итоговом месте x_i,— так что свойство ПР также отсутствует. Реальность этого последнего примера подтверждается постоянно появляющимися на страницах спортивной печати сообщениями о том, как в тех или иных соревнованиях игрок (или команда), уже обеспечивший себе выход в «лучшую» часть, перестает стремиться к победам, желая обеспечить себе на следующем этапе более слабых противников; так что в этой связи одноэтапные спортивные схемы представляются более логичными, последовательными и справедливыми, нежели многоэтапные.

Рассмотрим еще одну модель упорядочения, близкую к спортивным, которая была предложена В. Е. Жуковиным [56, 57] для кососимметрических матриц. Для произвольной пары объектов введём понятие *интегральной степени превосходства* (ИСП):

$$\tilde{\Phi}(x_i, x_j) \triangleq \sum_{t=1}^{n} \lambda_t (a_{it} - a_{jt}), \tag{3.10}$$

оценивающей превосходство x_i над x_j в сравнении с прочими объектами. Когда ИСП задана, ее можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}(x_i, x_j) = f(x_i) - f(x_j), \text{ при этом } \forall i\, f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{\Phi}(x_i, x_j).$$

Функция f в модели ИСП интерпретируется как функция полезности на X, и объекты предлагается упорядочивать по убыванию ее значений.

Очевидным слабым местом модели оказывается введение коэффициентов λ_t, интерпретируемых автором модели как «веса» или «коэффициенты важности» объектов. Однако, если целью обработки матрицы парных сравнений является ранжирование объектов (в количественной или порядковой шкале), то никаких «весов» и т. п. заранее задано быть не может (если же они заданы, то тем самым уже определено некоторое ранжирование и в вычислении функции полезности нужды нет). Для случая, когда λ_t заранее оценить не удается, в [57] предлагается выбрать их все просто равными $1/n$, что приводит к

$$\forall i, j \quad \tilde{\Phi}(x_i, x_j) = \sum_{t=1}^{n} (a_{it} - a_{jt})/n = (s_i - s_j)/n. \tag{3.11}$$

Поскольку из (3.11), очевидно, следует $\forall i \quad f(x_i) = s_i/n$, то поэтому модель ИСП полностью сводится к турнирной и самостоятельного интереса не представляет.

В рассмотренных выше моделях спортивного типа в качестве ранжирующего фактора выступала сумма набранных очков (во всей матрице или в отдельных подматрицах), и объекты упорядочивались по убыванию значений этого фактора. По аналогии с рассуждениями п. 2.3.3, можно построить минимаксный аналог спортивных моделей, в котором сила объекта оценивается по наиболее крупному его проигрышу. Наиболее полно эта идея отражена в модели *функции доминируемости* (ФД), ориентированной на обработку нечетких предпочтений [7, 108, 111].

Если $a_{ij} \in [0, 1]$ — степень принадлежности пары (x_i, x_j) к нечёткому отношению предпочтения, заданному на X, то функция доминируемости

$$l_X(x_i) \triangleq \max_{j \neq i} a_{ji} \tag{3.12}$$

характеризует максимальную силу, с которой объект x_i доминируется остальными объектами множества X. При $l_X(x_i) = 0$ x_i абсолютно не доминируется, при $l_X(x_i) = 1$ — абсолютно доминируется, при $0 < l_X(x_i) < 1$ — слабо доминируется. Для ранжирования объектов вместо $l_X(x_i)$ удобно рассматривать двойственную ей функцию недоминируемости

$$m_X(x_i) = 1 - l_X(x_i), \tag{3.13}$$

упорядочивая объекты по убыванию соответствующих ее значений.

Модель ФД предназначена для обработки матриц в калибровке В, однако соответствующие формулы (3.12)—(3.13) легко обобщаются и для калибровок типа Т, С, К. Наличие свойств ИР и ИС совершенно очевидно, а вот свойство Т не выполняется даже при выполнении условия обратимости $a_{ij}+a_{ji}=1$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим множество $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ и предположим $a_{12}=0{,}7$; $a_{13}=0{,}6$; $a_{23}=0{,}8$. При таких условиях $l_X(x_1)=0{,}4$; $l_X(x_2)=0{,}7$; $l_X(x_3)=0{,}8$, и оптимально упорядочение (1, 2, 3). После транспонирования получаем $l_X(x_1)=0{,}7$; $l_X(x_2)=0{,}8$; $l_X(x_3)=0{,}4$, так что оптимально не каноническое упорядочение (3, 1, 2), а поэтому свойство Т не имеет места.

Справедливость свойства УМ (при обычных оговорках) сомнений не вызывает, не требуют доказательства и свойства ПР и СД. В то же время приведенный пример показывает, что модель ФД слабо допускает сегментирование и не является консервативной. Говорить о наличии свойств КО и ЛС поэтому также не приходится.

Использование значений $m_X(x_i)$ в качестве количественных оценок важности объектов выглядит достаточно оправданным, особенно при обработке нечетких отношений предпочтения. Свойство СУ также имеет место, как и для прочих моделей первой группы. Оценок качества аппроксимации модель ФД не предусматривает.

3.2.2. Модель Брэдли-Терри. Исторически название закрепилось за простейшей моделью максимального правдоподобия, предложенной в [150], хотя сходные идеи высказывались еще Цермело [172]. Пригодна для простых структур без равноценных элементов и целочисленных турнирных матриц (вопросы ее применения к матрицам других калибровок освещены, например, в [53, 157] и в фундаментальном обзоре [146].

Каждому объекту в модели *Брэдли-Терри* (БТ) сопоставляется его «сила» π_i, причем предполагается, что вероятность превосходства в парном сравнении $P(x_i > x_j)$ прямо пропорциональна π_i:

$$P(x_i > x_j) = \pi_i/(\pi_i + \pi_j) = 1 - P(x_j > x_i).$$

Предполагая, что для каждой пары (i, j) проводится k актов парных сравнений и все парные сравнения независимы, выпишем условную вероятность данной матрицы A (функцию правдоподобия):

$$L(\pi) = C \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}\right)^{a_{ij}} \left(\frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j}\right)^{a_{ji}} = C \frac{\prod_{i=1}^{n} \pi_i^{s_i}}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\pi_i + \pi_j)^k}, \tag{3.14}$$

где $C = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \binom{k}{a_{ij}}$, а s_i — строчные суммы (3.8). Для отыскания нормализованного вектора π: $\sum_i \pi_i = 1$, максимизирующего функцию правдоподобия $L(\pi)$, прологарифмируем (3.14) и, взяв частные производные, получим окончательно

$$\begin{cases} s_i / \pi_i = k \sum_{j=1}^{n} (\pi_i + \pi_j)^{-1}; \quad i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Система (3.15) может быть решена итерационно, хотя скорость сходимости и невысока [53, 146, 150, 164].

После вычисления всех π_i объекты упорядочиваются по их убыванию. Как показано в [146, 156, 164], получаемое при этом упорядочение качественно совпадает с турнирным: если $s_i < s_j$, то и $\pi_i < \pi_j$, что дает возможность перенести на модель БТ основные свойства турнирной модели. В то же время, получаемые компоненты нормализованного вектора π вполне могут служить количественными оценками важности объектов (в шкале отношений).

3.2.3. Модель Бержа и ее обобщения. Модель известна по работе Бержа [22], предложившего ее для обработки простых структур предпочтений (хотя фактически восходит еще к ранней работе Кендалла [160]). Впоследствии модель была обобщена Бруком и Бурковым [27] для матриц со степенной калибровкой. Использование ее для турнирной калибровки также возможно, а для произвольных *ВС* не может считаться достаточно обоснованным.

При использовании модели *Бержа-Брука-Буркова* (БББ) предполагается, что матрица A неразложима (т. е. G' — сильно связный граф), в противном случае предлагается выделить неразложимые подматрицы (и бикомпоненты G'), обрабатывать их порознь, а получаемые фрагменты оптимального упорядочения склеивать воедино. Таким образом, модель заведомо обладает свойством слабой сегментируемости и, до некоторой степени, кусочной оптимальности (хотя говорить о выполнении свойств СБ и КО в полном объеме не приходится, а консервативность, как и для спортивных моделей, гарантирована только для полных простых структур, так как в этом случае она сразу вытекает из слабой сегментируемости).

Каждому объекту x_i в модели БББ ставится в соответствие цепочка так называемых итерированных сил $p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, \ldots$, в которой сила k-го порядка $p_i^{(k)}$ определяется как сумма элементов i-й строки в матрице A^k:

$$\forall i = \overline{1, n} \; p_i^{(k)} \triangleq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)}; \; \|a_{ij}^{(k)}\|_{n \times n} = A^k; \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

При этом при $k \to \infty$ имеет место $\lim_{k \to \infty} \left(p_i^{(k)} \Big/ \sum_{j=1}^{n} p_j^{(k)} \right) = \pi_i$, $i = \overline{1, n}$,

где нормализованный собственный вектор $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ матрицы

A отвечает максимальному по модулю собственному числу и, в силу теоремы Перрона — Фробениуса, может быть выбран положительным [35, 73]. Далее объекты упорядочиваются по убыванию соответствующих компонент вектора $\boldsymbol{\pi}$.

Поскольку при умножении A на положительную константу π остается собственным вектором, отвечающим максимальному по модулю собственному числу, модель обладает свойством ИР; а вот ИС, очевидно, места не имеет. Формально выполняется и свойство УМ (так как ранжирующий вектор $\boldsymbol{\pi}$ непрерывно зависит от элементов A), однако в реальных задачах даже при относительно небольших изменениях в матрице вектор $\boldsymbol{\pi}$ может изменяться очень сильно, причем особенно он чувствителен к замене нулевых элементов на ненулевые и наоборот [63].

Как было показано в [12, 14], если допустить произвольность диагональных элементов в исходной матрице, то модель БББ свойством транспонируемости не обладает. Действительно, следуя [14], рассмотрим простую структуру с диагональными элементами вида $a_{ii}=n-1-\sum_{j\neq i} a_{ij}$, $i=\overline{1,\ n}$ и перейдем от A к стохастической матрице $B=A/(n-1)$, что можно сделать в силу свойства ИР. Спектральный радиус полученной матрицы B равен единице, а ее максимальному собственному числу $\lambda=1$ отвечает собственный вектор $\boldsymbol{\pi}=(1, \ldots, 1)/n$. В то же время стохастическая матрица B задает некоторую марковскую цепь с финальным распределением вероятностей $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)$, в котором, вообще говоря, компоненты различны. Заметим, что $B^T\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$, так что $\boldsymbol{p}$ — собственный вектор матрицы B^T, отвечающий $\lambda=1$. Пусть I — упорядочение по убыванию компонент $\boldsymbol{p}$, оптимальное для B^T, а I^T — инвертированное упорядочение, тогда несложно убедиться в том, что:

а) I, очевидно, оптимально для B, поскольку в векторе $\boldsymbol{p}$ все компоненты одинаковы, а значит, $I^*_{\text{opt}}(B)=I^*$;

б) I^T заведомо не оптимально для B^T.

Хотя приведенный пример выглядит искусственным, он рождает определенные сомнения в возможности гарантировать выполнение свойства транспонируемости, что заметно снижает практическую ценность модели БББ. Тем не менее, вопрос о наличии этого свойства в том случае, когда диагональные элементы не произвольны, а равны 1/2, а также для матриц типа Т или С остается открытым. Заметим, кстати, что и само вычисление вектора $\boldsymbol{\pi}$ в конкретных случаях может оказаться довольно трудоемким.

При увеличении произвольного элемента a_{ij} неотрицательной матрицы A соответствующая компонента π_i нормализованного собственного вектора $\boldsymbol{\pi}$, отвечающего максимальному по модулю собственному числу (вещественному и положительному [35, 73]),— увеличивается, а прочие компоненты уменьшаются. Действительно, пусть $\tilde{A}$ — матрица, получаемая из A вычеркиванием i-го столбца и i-й строки, а $\tilde{\boldsymbol{a}}_i$ — редуцированный i-й столбец, т. е. $\tilde{\boldsymbol{a}}_i=(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{i-1,i}, a_{i+1,i}, \ldots, a_{ni})^T$, тогда для компонент $\boldsymbol{\pi}$ сразу получим

$$\begin{cases} (\tilde{A}-\lambda E)\tilde{\pi}+\tilde{a}_i\pi_i=0, \\ \sum_{i=1}^{n}\pi_i=1, \end{cases} \quad (3.17)$$

где $\tilde{\pi}=(\pi_1, \ldots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \ldots, \pi_n)$ — редуцированный собственный вектор. Из (3.17) непосредственно следует $\tilde{\pi}=(\lambda E-\tilde{A})^{-1}\cdot\tilde{a}_i\pi_i$, откуда, разлагая в ряд, получаем

$$\tilde{\pi}=(E/\lambda+\tilde{A}/\lambda^2+\tilde{A}^2/\lambda^3+\ldots)\tilde{a}_i\pi_i. \quad (3.18)$$

Поскольку при увеличении a_{ij} ни $\tilde{a}_i$, ни $\tilde{A}$ не изменяются, а максимальное собственное число возрастает [35], из (3.18) вытекает, что с ростом a_{ij} отношение π_t/π_i уменьшается для всех $t\neq i$. Таким же путем можно продемонстрировать, что с уменьшением a_{ji} компонента π_j уменьшается, а остальные возрастают. Подобные соображения делают весьма вероятным выполнение в модели ЕББ свойства ПР, однако для строгого доказательства необходимо показать, что при одновременном увеличении a_{ij} и уменьшении a_{ji} (сохраняющем калибровку) компонента π_i увеличивается больше прочих, чего пока сделать не удалось.

Заметим, что для данной модели из свойства ПР вытекало бы и свойство СД. Действительно, пусть $x_i \gg x_j$, тогда заменим в матрице A все элементы вида a_{it} и a_{ti} на a_{jt} и a_{tj} соответственно, элементы a_{ij} и a_{ji} сделаем равными, а остальные оставим без изменений. Для полученной матрицы A', очевидно, $\pi_i=\pi_j$, в то же время переход от A' к A осуществляется за счет цепочки однотипных операций, каждая из которых состоит в увеличении элемента i-й строки и уменьшении симметричного ему элемента i-го столбца. Если на каждом шаге π_i возрастает сильнее, чем π_j, то в итоге $\pi_i>\pi_j$ и доминирование сохраняется полностью. Однако для калибровок типа С и Т, а также для простых структур с фиксированными диагональными элементами свойство СД легко доказывается непосредственно, ибо из $x_i \gg x_j$ сразу вытекает, что

$$\lambda\pi_i=\sum_{t=1}^{n}a_{it}\pi_t=a_{ii}\pi_i+a_{ij}\pi_j+\sum_{t\neq i,j}a_{it}\pi_t>$$

$$>a_{ji}\pi_i+a_{jj}\pi_j+\sum_{t\neq i,j}a_{jt}\pi_t=\sum_{t=1}^{n}a_{jt}\pi_t=\lambda\pi_j \Rightarrow \pi_i>\pi_j,$$

что и требуется доказать.

Получаемые значения компонент собственного вектора π_i могут служить оценкой важности объектов в пропорциональной шкале [27]. Каких-либо оценок качества аппроксимации в модели не предусмотрено, но, как подчеркивается ее авторами [27], само значение λ для матрицы, заданной в степенной калибровке, может выступать в роли оценки согласованности отдельных парных сравнений (и, таким образом, оценивать величину вносимых при аппроксимации искажений).

3.2.4. Стохастическая модель Ушакова (СУ). Модель предложена И. А. Ушаковым [130] для обработки матриц, заданных в степенно́й и вероятностной калибровках. Матрица A преобразуется в вероятностную матрицу P, произвольный элемент p_{ij} которой интерпретируется как вероятность превосходства x_j над x_i (если A задана в вероятностной калибровке, то просто $P=A^T$, если же в степенно́й, то $p_{ij}=a_{ji}(1+a_{ji})^{-1}=1-p_{ij}$). Далее строится стохастическая матрица $\tilde{P}=\|\tilde{p}_{ij}\|_{n\times n}$:

$$\tilde{p}_{ij}=p_{ij}/(n-1),\quad i\neq j;\qquad \tilde{p}_{ii}=1-\sum_{j\neq i}\tilde{p}_{ij},\quad i,\ j=\overline{1,\ n},\qquad (3.19)$$

которой придается смысл матрицы переходных вероятностей некоей марковской цепи. Упорядочение объектов в модели СУ производится по убыванию компонент соответствующего финального распределения вероятностей, вычисляемых по известным формулам:

$$p_i=\Delta_{ii}\Big/\sum_{j=1}^{n}\Delta_{jj},\qquad i=\overline{1,\ n},\qquad (3.20)$$

где Δ_{ii} — минор, получаемый из $\det(E-\tilde{P})$ вычеркиванием i-го столбца и i-й строки.

Положительность всех p_i может заведомо гарантироваться только для неразложимых матриц $\tilde{P}$ (т. е. сильно связных графов G'), если это условие не выполнено, некоторые компоненты могут оказаться нулевыми. Чтобы избежать этого, предлагается (как и в модели БББ) выделять неразложимые подматрицы и обрабатывать их порознь, соединяя получаемые фрагменты. Тем самым, модель СУ также обладает слабой сегментируемостью и, частично, свойством КО.

Свойства инвариантности, очевидно, места не имеют, ибо соответствующие изменения матрицы A нарушают ее калибровку. Поскольку вектор $p=(p_1,\ \ldots,\ p_n)$ является собственным для матрицы $\tilde{P}^T$ и отвечает максимальному собственному числу $\lambda=1$, модель СУ имеет много общего с моделью БББ и, в частности, обладает свойством УМ (с теми же оговорками). Наличие свойства Т выглядит сомнительным, хотя строго это доказать не удалось. В то же время, очевидными и не требующими никаких доказательств представляются свойства ПР и СД. Говорить о свойстве ЛС или о консервативности модели, как и для модели БББ, не приходится.

Получаемые компоненты финального распределения вероятностей могут с успехом использоваться в качестве количественных оценок важности объектов. Оценки качества аппроксимации модель не предусматривает.

3.2.5. Модель равномерного сглаживания (РС). Предложена Ю. В. Киселевым [66] для обработки положительных матриц с калибровкой Т или С и опирается на известную аксиому Льюса, устанавливающую однозначное соответствие между неявно заданными «силами» отдельных объектов. Если A — турнирная матрица, то по аксиоме Льюса [163] должно иметь место

$$\forall i,\ j\quad \pi_i/\pi_j = a_{ij}/a_{ji} = a_{ij}/(c - a_{ij}), \tag{3.21}$$

где π_i — «сила» объекта x_i, а $c = a_{ij} + a_{ji}$ — турнирная константа, и при этом

$$\pi_i \equiv \pi_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} \pi_j = \left(\sum_{l=j}^{n} \pi_j/\pi_i\right)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\right)^{-1},$$

где $b_{ji} \equiv a_{ji}/a_{ij}$ — элементы матрицы B, имеющей степенну́ю калибровку. Обозначая $\forall i, j\ \ z_{ij} = \ln b_{ij}$, легко видеть, что из (3.21) непосредственно следует

$$\forall i,\ j,\ k\quad z_{ij} = z_{ik} + z_{kj} = -z_{ki} + z_{kj}, \tag{3.22}$$

так что матрица $Z = \|z_{ij}\|_{n \times n}$ обладает известной избыточностью и может быть восстановлена целиком по любой своей строке.

Реальные матрицы парных сравнений редко удовлетворяют аксиоме Льюса. В свете этого, в [66] предложено от исходной матрицы A (или B, если исходная матрица задана в степенно́й калибровке) перейти к матрице Z и построить n различных матриц $Z^{(1)}, \ldots$ $\ldots, Z^{(n)}$, полагая, что матрица $Z^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$ порождается k-й строкой матрицы Z по формуле (3.21). Введя усредненную матрицу $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_i Z^{(i)}$, легко убедиться, что она кососимметрическая и удовлетворяет (3.22), причем

$$\forall i,\ j\quad \bar{z}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (z_{ik} + z_{kj}). \tag{3.23}$$

Проделав обратные преобразования вида $\forall i, j\ \ \bar{b}_{ij} = \exp \bar{z}_{ij}$, $\bar{a}_{ij} = c\bar{b}_{ij}(1 + \bar{b}_{ij})^{-1}$, можно получить матрицы $\bar{B}$ и $\bar{A}$, удовлетворяющие аксиоме Льюса и допускающие однозначное определение ранжирующего вектора π, удовлетворяющего (3.21):

$$\pi_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ji}\right)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} \ln (b_{jr} b_{ri})\right)\right)^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{r=1}^{n} \frac{a_{jr} a_{ri}}{a_{ir} a_{rj}}\right)^{1/n}\right]^{-1}, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{3.24}$$

Несложно убедиться в том, что модель РС инвариантна к растяжению (в калибровке Т), но не к сдвигу. Свойство Т также имеет место, поскольку транспонирование матрицы A (или B) влечет за собой и транспонирование $\bar{Z}$, а значит, и $\bar{A}$ (или $\bar{B}$), так что из (3.21) сразу вытекает, что если для A (или B) $\pi_i > \pi_j$, то для A^T (или B^T) соответственно $\pi_i < \pi_j$. Прямой анализ (3.24) показывает (с учетом положительности всех a_{ij}) и наличие у модели РС свойства УМ; доминирование сохраняется полностью, так как если $x_i \gg x_j$, то из (3.24), очевидно, следует $\pi_i > \pi_j$. Положительная реакция также легко прослеживается: увеличение некоторого a_{ij} (при одновременном уменьшении a_{ji}) приводит к увеличению z_{ij} и уменьшению z_{ji}, а остальные элементы Z не меняются, поэтому, в силу (3.23), все z_{ik}, $k \neq i$ увеличиваются, а стало быть, увеличиваются и все π_i/π_k. Слабая СБ также имеет место.

Модель РС не является консервативной, свойствами КО и ЛС не обладает и никаких оценок качества аппроксимации не предусматривает, хотя матрицы разностей $A-\overline{A}$ и $B-\overline{B}$ можно считать оценками согласованности отдельных парных сравнений в исходных матрицах. Сами получаемые коэффициенты π_i можно использовать для количественной оценки важности объектов в пропорциональной шкале.

Перейдем теперь к анализу моделей второй группы.

3.2.6. Максимальное согласование. Простейшая модель *максимального согласования* (МС) первоначально была предложена Слейтером [168] для анализа ПС без равноценных элементов. На базе определения элементарного несогласия упорядочения I с матрицей A (по Слейтеру, оно имеет место, если для некоторой пары объектов (x_i, x_j) справедливо $x_i > x_j$, т. е. $a_{ij}=1$, $a_{ji}=0$, однако x_j предшествует x_i в I), оптимальным предлагалось считать максимально согласованное с A упорядочение, т. е. имеющее минимальное число таких элементарных несогласий. Нетрудно видеть, что в данном случае такое определение вполне идентично определениям гл. 2, а искомое упорядочение оказывается ближайшим к исходной структуре предпочтений в смысле метрики хеммингова типа (2.7). Действительно, если обозначить через $v_A(I)$ — слейтерово число несогласий I с A, а через $B(I)$ — матрицу линейного порядка, задаваемую I, то очевидно, что

$$\rho(A,\ B(I)) = 2\alpha v_A(I). \tag{3.25}$$

Слейтерово число несогласий $v_A(I)$ может быть представлено и в виде $v_A(I) = n(n-1)/2 - \sum\limits_{r=1}^{n-1} \sum\limits_{s=r+1}^{n} a_{i_r i_s}$, поэтому задача отыскания оптимального упорядочения может быть записана в канонической форме:

$$G_A(I) \triangleq \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} a_{i_r i_s} \to \max_{I \in I^*}, \tag{3.26}$$

которая, как нетрудно убедиться, представляет собой задачу поиска структуры, наиболее совпадающей с исходной. Задача (3.26) предписывает необходимость одновременной перестановки строк и столбцов, максимизирующей сумму наддиагональных элементов в получаемой матрице (рис. 3.1*а*) и известна под названием *задачи о наилучшей приближенной триангуляции* (*нп*-триангуляции) матрицы A. Сам же показатель $G_A(I)$ (соответствующая наддиагональная сумма) может интерпретироваться как показатель качества аппроксимации исходной структуры линейным упорядочением [9, 16] (и равен общему числу оставляемых от исходной структуры дуг).

Опираясь на формальную постановку (3.26), модель можно обобщить и для турнирной и кососимметрической калибровки, считая оптимальным (наиболее согласованным) линейное упорядочение, осуществляющее *нп*-триангуляцию матрицы A, т. е. максимизирующее функционал $G_A(I)$ (равный в этом случае для кососимметрической постановки разности между суммарным весом оставляемых и отбрасываемых дуг, а для турнирной постановки отличающийся от этой разности лишь на константу), смысл которого, как оценки качества аппроксимации, вполне сохраняется. Поскольку такое упорядочение является максимально согласованным (т. е. оставляет в исходной структуре предпочтений множество дуг с максимально

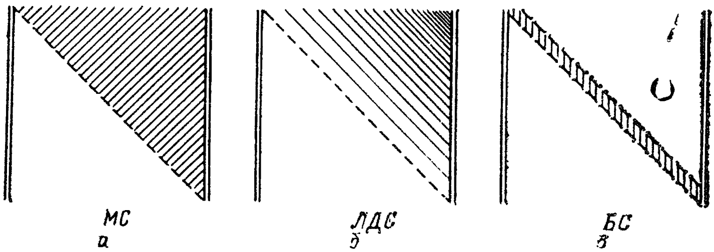


Рис. 3.1

возможным суммарным весом), оно остается ближайшим к исходной структуре предпочтений.

Естественность и концептуальная простота модели максимального согласования привлекли к ней внимание многих исследователей, из которых, в первую очередь, отметим Римейджа и Томпсона [165, 166] и де Кэйни [151, 152], подробно исследовавших ее связь со схемами метода максимального правдоподобия, а также Дж. Кемени [65], указавшего на ее тесное родство с проблемами построения результирующих групповых упорядочений, отмечаемое также в [53, 99, 104, 112, 119] и др., и Дж. Муна [164]. В СССР модель МС много и плодотворно исследовал И. Ф. Шахнов, предложивший ее независимо от Слейтера и рассмотревший ряд ее дальнейших обобщений [19, 20], много работали над ней Б. Г. Миркин [104, 105], Б. Г. Литвак [98, 99], В. Н. Бурков и В. О. Гроппен [30] и др.

Как было показано в [9], модель МС обладает важным свойством калибровочной инвариантности: если B — симметрическая матрица, то $\forall A\ I^*_{\text{opt}}(A)=I^*_{\text{opt}}(A+B)$, так что для любой пары (i, j) значения a_{ij} и a_{ji} роли не играют, важна лишь разность $a_{ij}—a_{ji}$ (т. е. интенсивности предпочтений измерены в шкале разностей). Это открывает путь и к обработке матриц типа ВС, поскольку за счет правильного подбора матрицы B суммарную матрицу $A+B$ всегда можно сделать кососимметрической.

Справедливость свойств ИР и ИС для модели очевидна, а такие свойства, как ПР и Т, легко доказываются от противного. Свойство УМ сразу вытекает из того факта, что оптимальное упорядочение — ближайшее к исходной структуре предпочтений: в случае когда оно единственно, малые изменения в A оставят его ближайшим; если же таких упорядочений несколько, малые изменения в A оставят ближайшим хотя бы одно из них. Наличие у модели МС свойств СБ, КО и ЛС также легко доказывается в [9].

В рамках модели МС возможно существование оптимальных упорядочений, не сохраняющих доминирования. Действительно, пусть $I=(i_1, \ldots, i_n) \in I^*_{\mathrm{opt}}(A)$, причем $x_{i_k} \gg x_{i_{k+1}}$, однако $a_{i_k i_{k-1}} = a_{i_{k+1} i_k}$. Тогда перестановка x_{i_k} и $x_{i_{k+1}}$ приведет к иному упорядочению, не сохраняющему доминирования, однако имеющему тот же показатель качества G_A, что и I, а значит, тоже оптимальному. В то же время, оптимальное упорядочение, сохраняющее доминирование, всегда найдется: если $\exists r, s$: $x_r \gg x_s$, а $I \in I^*_{\mathrm{opt}}(A)$ не сохраняет этого доминирования, то, поменяв местами x_r и x_s, получим упорядочение с заведомо не худшим показателем (т. е. также оптимальное), сохраняющее доминирование. Итак, доминирование в модели МС сохраняется частично.

Отметим еще тесную связь модели МС с общей схемой метода максимального правдоподобия, ограничиваясь здесь случаем ПС без равноценных элементов ($a_{ij} \in \{0, 1\}$); анализ более сложных калибровок можно найти, например, в обзоре [146]. Предполагая, что π_{ij} — вероятность $x_i > x_j$, введем кортеж всевозможных π_{ij}: $\pi = (\pi_{ij})_{i, j=\overline{1, n}}$ и в предположении независимости отдельных парных сравнений выпишем функцию правдоподобия $L(\pi) \triangleq P(A \mid \pi) = \prod_{i, j:\, i \neq j} \pi_{ij}^{a_{ij}}$. Если $I=(i_s, \ldots, i_n)$, то

$$L(\pi) = \prod_{r=1}^{n-1} \prod_{s=r+1}^{n} \left(\pi_{i_r i_s}^{a_{i_r i_s}} \cdot \pi_{i_s i_r}^{a_{i_s i_r}}\right). \tag{3.27}$$

Упорядочение I назовем *слабым стохастическим порядком* (ССП), (для данного π), если

$$\forall i, j \quad N_i(I) < N_j(I) \Rightarrow \pi_{ij} \geqslant \pi_{ji} = 1 - \pi_{ij} \Leftrightarrow \pi_{ij} \geqslant {}^1/_2 \geqslant \pi_{ji},$$

и поставим задачу о поиске наиболее правдоподобного ССП. Вводя $\Pi(I)$ — множество таких π, что для них I — ССП, и обозначив

$$L(I) \triangleq \max_{\pi \in \Pi(I)} L(\pi), \tag{3.28}$$

получим задачу о поиске упорядочения $\hat{I}$:

$$L(\hat{I}) \triangleq \max_{I \in I^*} L(I) = \max_{I \in I^*} \max_{\pi \in \Pi(I)} L(\pi). \tag{3.29}$$

Можно показать [146, 151, 166], что максимум в (3.28) достигается на кортеже $\hat{\pi}(I)$ с элементами вида

$$\hat{\pi}_{ij}(I) = \begin{cases} \max(1/2,\ a_{ij}), & \text{если } N_i(I) < N_j(I), \\ 1 - \hat{\pi}_{ji}(I) & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.30}$$

Подставляя (3.30) в (3.29) и учитывая (3.27), после логарифмирования получаем

$$\log_2 L(\hat{I}) = \max_{I \in I^*} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} \nu_{i_r i_s},$$

где $\nu_{ij}=a_{ij}\log_2\hat{\pi}_{ij}(I)+a_{ji}\log_2\hat{\pi}_{ji}(I)$. Поскольку в любом случае $\nu_{ij}=a_{ij}-1$, то

$$\log_2 L(\hat{I}) = \max_{I \in I^*} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} (a_{i_r i_s}-1),$$

т. е. искомое упорядочение $\hat{I}$ осуществляет и *нп*-триангуляцию матрицы A.

Итак, наиболее согласованное упорядочение является не только ближайшим линейным порядком, но и наиболее правдоподобным ССП.

В большинстве случаев множество $I^*_{\text{opt}}(A)$ в модели МС оказывается одноэлементным. Наличие нескольких оптимальных упорядочений (обычно не сходно порожденных и довольно далеких друг от друга в смысле (2.7) служит косвенным свидетельством слишком больших аппроксимационных искажений исходной структуры. Оценок важности объектов обычно не предусматривается, однако разработка такой системы оценок (в шкале интервалов), в принципе, не выглядит невозможной, и работы в этом направлении ведутся [153].

Показатель $G_A(I)$, как уже отмечалось, в модели МС выступает в роли оценки качества аппроксимации, поддиагональная же сумма преобразованной (*нп*-триангулированной) матрицы, тесно связанная с расстоянием до ближайшего линейного порядка, может использоваться, как оценка искажений, вносимых в исходную структуру при равномерной аппроксимации, или оценка уже имеющегося в этой структуре «внутреннего» порядка.

Идея использовать минимальное число элементарных несогласий $v^*=\min\limits_{I \in I^*} v_A(I)$ в качестве параметра, оценивающего согласованность исходной структуры предпочтений, степень ее «внутренней» упорядоченности, была выдвинута П. Слейтером [168] для задач обработки простых структур предпочтений. Согласно Слейтеру, аппроксимация исходной ПС линейным порядком имеет смысл лишь тогда, когда результаты отдельных актов парных сравнений достаточно согласуются между собой, а аппроксимирующая структура достаточно сходна с исходной.

Следуя [164, 168], воспользуемся для формализации использованного термина «достаточно» и более строгого анализа методами статистической теории проверки гипотез *). Пусть H_1 — гипотеза о достаточной внутренней согласованности отдельных результатов, C_1 — альтернативная гипотеза, а λ — специальный параметр, оце-

*) Ограничимся здесь случаем, когда исходная структура не содержит равноценных элементов.

нивающий степень согласованности результатов и принимающий значения из множества $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_M\}$ (число таких значений конечно, ибо число полных асимметричных бинарных отношений на X равно $2^{n(n-1)/2}$). Далее будем полагать, что $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_M$, причем большее значение λ отвечает меньшей степени согласованности.

Обозначим через $f_n(\lambda_i)$ — число полных бинарных отношений на X, для которых $\lambda=\lambda_i$. Тогда имеет место разложение

$$2^{n(n-1)/2}=f_n(\lambda_1)+f_n(\lambda_2)+\ldots+f_n(\lambda_M). \tag{3.31}$$

Установив некоторый уровень значимости p_0, можно выявить наибольшее значение λ_s, для которого вероятность случайного получения отношения с $\lambda \leqslant \lambda_s$ еще не превосходит этот уровень:

$$P(\lambda \leqslant \lambda_s) \equiv 2^{-n(n-1)/2} \cdot \sum_{j=1}^{s} f_n(\lambda_j) \leqslant p_0. \tag{3.32}$$

В случае $\lambda \leqslant \lambda_s$ гипотезу о случайности C_1 следует отвергнуть (ибо она маловероятна) и предпочесть H_1 (но до совершения выбора между C_1 и H_1 все асимметричные полные бинарные отношения предполагаются равновероятными).

В качестве параметра λ Кендаллом и Бэбингтоном Смитом [161] было предложено число циклических триад $\gamma(G)$ (т. е. элементарных трехзвенных контуров) в орграфе G, для подсчета которого в конкретном орграфе существует известная формула [161, 164]:

$$\gamma(G)=n(n-1)(2n-1)/12-\sum_{i=1}^{n} s_i^2, \tag{3.33}$$

где s_i определяются обычным образом из (3.8). Распределение этой величины (в предположении случайного выбора отношения) с ростом n асимптотически стремится к нормальному с параметрами

$$\begin{cases} \mu=\frac{1}{4}\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{24}, \\ \sigma^2=\frac{3}{16}\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{32}, \end{cases} \tag{3.34}$$

а при конечных n «хвост» распределения отсекается верхними оценками

$$\gamma(G) \leqslant \frac{1}{24}\begin{cases} n\cdot(n^2-1) & \text{при нечетном } n, \\ n\cdot(n^2-4) & \text{при четном } n. \end{cases} \tag{3.35}$$

Формулы (3.34)—(3.35), приводимые в [164], значительно облегчают проверку гипотезы C_1, позволяя при достаточно больших n воспользоваться стандартными методами математической статистики.

В качестве альтернативы параметру $\gamma(G)$ Слейтер предложил использовать минимально возможное число несогласий $v^*(G)$ — оценку расстояния до ближайшего линейного порядка. Однако практическое его использование не всегда удобно по следующим двум причинам. Во-первых, при достаточно большом n само вычисление $v^*(G)$ встречает серьезные трудности, вызываемые необходимостью перебора большого количества вариантов. Во-вторых, распределение этого параметра для произвольного n неизвестно. Известны лишь несколько первых формул [168]:

$$f_n(0) = n!,$$
$$f_n(1) = n!\,(n-2)(3n-7)/6,$$
$$f_n(2) = n!\,(9n^4-78n^3+235n^2-438n+680)/72$$

и т. д., область применения которых сравнительно узка.

Вопрос о выборе того или иного параметра для оценки вносимых искажений (и согласованности исходной структуры) должен решаться с учетом тех принципов, которые положены в основу используемой модели линейного упорядочения. Проиллюстрируем разницу между $\gamma(G)$ и $v^*(G)$ следующим простым примером. Пусть структура G_1 отличается от линейного упорядочения $I=(1, 2, 3, 4, 5)$ только дугой (5, 1), а структура G_2 — только дугой (3, 1). По Слейтеру в обоих случаях $v^*(G_1)=v^*(G_2)=1$, однако по Кендаллу—Смиту $\gamma(G_1)=3$, а $\gamma(G_2)=1$, так что G_1 приходится признать менее согласованной, чем G_2, мотивируя это тем, что в первом случае x_1 уступает более «слабому» объекту, отстоящему от него дальше (в смысле расстояния вдоль аппроксиманты, введенного в 2.3), чем во втором. Но такое объяснение более или менее убедительно лишь для моделей дальних связей (хотя и в этом случае введение понятия расстояния вдоль аппроксиманты и соответствующее разделение объектов на более «сильных» и более «слабых» уже подразумевает, что аппроксимация допустима, но такое предположение не может использоваться до тех пор, пока не отвергнута гипотеза C_1), а для модели МС слейтеровский параметр, безусловно, более предпочтителен.

Заметим еще, что величины $\gamma(G)$ и $v^*(G)$, хотя и не связаны функционально, сильно коррелируют между собой, так что для приблизительных оценок разница между ними может оказаться не столь существенной. Ряд дополнительных вопросов, связанных с оценкой согласованности отдельных результатов парных сравнений, освещен в работах Т. А. Казанской [59—61].

Основное затруднение при практическом использовании модели МС состоит в том, что задача *нп*-триангуляции, будучи эквивалентна известной NP-трудной проблеме о множестве дуг, разрезающих контуры, также NP-трудна, так что получение ее оптимального решения для больших n может потребовать слишком значительного времени. Разумным при этом выглядит ограничиться локально-оптимальным решением, понимая под ним, в согласии с [114], такое упорядочение I, показатель качества $G_A(I)$ которого не может быть улучшен за счет одиночного перемещения любого объекта. Так получаемая *локальная модель максимального согласования* (ЛМС) обладает всеми свойствами модели МС.

Несложно убедиться в том, что локально-оптимальное упорядочение должно удовлетворять приведенному ранее соотношению

(3.7), указывающему на невыгодность перемещения объектов сверху вниз, и двойственному соотношению

$$\forall s,\ t\colon\ 1 \leqslant s < t \leqslant n \quad x_{i_t} \geqslant \{x_{i_j} \mid j = \overline{s,\ t-1}\}, \tag{3.36}$$

указывающему на невыгодность перемещения снизу вверх. Поиск такого упорядочения весьма прост и может осуществляться в два этапа. Вначале строится некоторое начальное упорядочение, далее в нем ищутся фрагменты, на которых нарушаются соотношения (3.7) или (3.36). В первом случае объект x_s помещается после x_t, во втором случае x_t ставится перед x_s. Далее поиск продолжается и заканчивается, когда таких фрагментов не остается. Как указывается в [9], даже для больших n такая процедура быстро приводит к получению локально-оптимального упорядочения, причем разница в показателях качества искомого оптимального и так построенного локально-оптимального упорядочений обычно очень невелика (и даже более того, так построенное упорядочение нередко само оказывается оптимальным) *).

Для построения оптимальных упорядочений в модели МС было предложено большое число алгоритмов, использовавших идеи целочисленного линейного программирования [151], динамического программирования [148, 166, 169] и метода ветвей и границ [30, 98, 105, 112, 152, 155]. Здесь мы опишем один из наиболее быстрых алгоритмов последнего типа, предложенный в [9] и использующий скорейший спуск по дереву вариантов.

Обработка матрицы A в этом алгоритме начинается с приведения ее к кососимметрическому виду (что можно сделать в силу свойства калибровочной инвариантности модели) и выделения бикомпонент в структуре предпочтений (если орграф G более или менее разрежен, то для этого используются обычные процедуры типа [131], для обработки же насыщенных графов была разработана специальная схема [10]). Далее каждая бикомпонента обрабатывается порознь, и полученные фрагменты склеиваются (что можно сделать в силу свойств СБ и КО).

Рассмотрим процесс обработки отдельной бикомпоненты, полагая (без ограничения общности), что исходный граф G сильно связен, так что обрабатывается весь граф G (и вся матрица A). Прежде всего, способом, указанным выше, строится локально-оптимальное упорядочение, показатель качества которого используется при ветвлении в качестве начального рекордного значения (поскольку это значение обычно оказывается весьма высоким, тем самым достигается существенная экономия в рассмотрении вариантов). Для дополнительного сокращения перебора в ходе ветвления широко используются также уже отмечавшиеся следствия

---

*) И. Ф. Шахновым были исследованы локальные оптимумы более высоких порядков, когда показатель качества не улучшается перемещениями двух и более объектов, и получены соответствующие соотношения, аналогичные (3.7) и (3.36). Построение таких упорядочений, однако, гораздо более трудоемко, выигрыш же в показателе качества незначителен.

из свойства ЛС: если $I=(i_1, \ldots, i_n)$ — локально-сбалансированное упорядочение, то в нем:

а) баланс любого объекта во встречах с нижестоящими неотрицателен

$$\forall s=\overline{1, n-1} \quad \sum_{t=s+1}^{n} a_{i_s i_t} \geqslant 0; \tag{3.37}$$

б) любой объект не уступает в парных сравнениях объекту, непосредственно следующему за ним в I

$$\forall s=\overline{1, n-1} \quad a_{i_s i_{s+1}} \geqslant 0. \tag{3.38}$$

Опишем собственно процесс ветвления. Множество возможных вариантов представляется алгоритмом в виде дерева, и в узле k-го уровня первые k мест в строящемся упорядочении уже заняты объектами $j_1, \ldots, j_k$, прочие $n-k$ мест и $n-k$ объектов пока свободны.

При этом в данном узле алгоритм вычисляет верхнюю оценку для показателя качества G_Λ любого упорядочения, начинающегося с сегмента $(j_1, \ldots, j_k)$:

$$B(j_1, \ldots, j_k)=\sum_{s=1}^{k} \sum_{t=s+1}^{n} a_{j_s j_t}+\sum_{s=k+1}^{n-1} \sum_{t=s+1}^{n} |a_{j_s j_t}|, \tag{3.39}$$

и оценки перспективности свободных объектов

$$c(j_m | j_1, \ldots, j_k)=\sum_{s=k+1}^{n} a_{j_m j_s}; \qquad m=\overline{k+1, n} \tag{3.40}$$

(напомним, что $a_{j_m j_m}=0$).

При ветвлении осуществляется переход к узлу $(k+1)$-го уровня, т. е. некоторый объект фиксируется на $(k+1)$-м месте (без ограничения общности считаем, что это объект $x_{j_{k+1}}$), а оценки (3.39) и (3.40) пересчитываются по рекуррентным формулам

$$B(j_1, \ldots j_{k+1})=B(j_1, \ldots, j_k)+c(j_{k+1} | j_1, \ldots, j_k)-$$
$$-\sum_{s=k+2}^{n} |a_{j_{k+1} j_s}|; \; c(j_m | j_1, \ldots, j_{k+1})=c(j_m | j_1, \ldots, j_k)+a_{j_{k+1} j_m}. \tag{3.41}$$

В первую очередь при ветвлении рассматриваются наиболее перспективные варианты.

Ветвление к данному узлу $(k+1)$-го уровня осмысленно лишь в том случае, если:

а) оценка (3.41) превосходит текущее рекордное значение;

б) оценка $c(j_{k+1} | j_1, \ldots, j_k)$ неотрицательна (см. (3.37));

в) $a_{j_k j_{k+1}} \geqslant 0$ (см. (3.38)).

Если хотя бы одно из этих условий нарушено, то естественно исключить соответствующую ветвь из рассмотрения. Если же выясняется, что все имевшиеся в данном узле направления ветвления либо бессмысленны, либо уже испробованы, то производится возврат к материнскому узлу (k—1)-го уровня, причем все имевшиеся там оценки сохраняются.

При достижении узла n-го уровня все n мест в строящемся упорядочении оказываются занятыми, а показатель его качества совпадает с оценкой $B(j_1, \ldots, j_n)$. Если текущее рекордное значение улучшено, фиксируется новый рекорд.

Ветвление начинается в узле нулевого уровня, когда все объекты и все места свободны. Оценка этого узла $B(\varnothing)$, очевидно, равна

$$B(\varnothing)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|,$$

а перспективности свободных игроков оцениваются набранными ими построчными суммами:

$$c(i\,|\,\varnothing)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=s_i;\qquad i=\overline{1,\ n}. \tag{3.42}$$

Закончить же ветвление следует при очередном возврате на нулевой уровень, когда выясняется, что все осмысленные направления уже использованы.

Как отмечено в [9], подобный алгоритм вполне эффективен при размерности наибольшей бикомпоненты не свыше 20—25, при больших же значениях целесообразно ограничиться локальным оптимумом.

3.2.7. Модели неравномерной аппроксимации. Как уже отмечалось в гл. 2, в моделях неравномерной аппроксимации предполагается, что различные дуги вносят разный вклад в интегральный показатель качества; при этом могут быть предложены два прямо противоположных подхода к аппроксимации исходной структуры.

Применительно к задаче построения линейного упорядочения первый из них предполагает, что элементарное несогласие должно считаться тем более тяжелым, чем дальше друг от друга в упорядочении I соответствующая пара объектов. В простейшем случае это приводит к модели *линейных дальних связей* (ЛДС) [13, 16], в которой тяжесть элементарного несогласия линейно зависит от расстояния между объектами вдоль упорядочения I. Поиск оптимальных для такой модели упорядочений требует решения дискретной оптимизационной задачи с видоизмененным показателем качества

$$G'_A(I)\triangleq\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=r+1}^{n}(s-r)\,a_{i_r i_s}\to\max_{I\in I^*}, \tag{3.43}$$

поставленной и подробно исследованной в [159]. На рис. 3.1*б* сгущение штриховки к правому верхнему углу матрицы отражает бо́льший вес дальних связей.

Модель ЛДС может использоваться для матриц в калибровках ПС, Т, К, а также, возможно, ВС. Ее можно рассматривать как своеобразное видоизменение модели МС. Справедливость свойств ИР и ИС очевидна, свойства Т и ПР исследуются аналогично модели МС, наличие устойчивости в малом также легко доказывается. Рассуждения, аналогичные проведенным выше для модели МС, показывают, что в модели ЛДС доминирование должно сохраняться полностью, а вот свойствами СБ, КО и ЛС, а равно и свойством калибровочной инвариантности модель ЛДС не обладает, консервативной не является (хотя для ПС без равноценных элементов консервативность, конечно, имеет место) и каких-либо оценок важности объектов не предусматривает. Различные оптимальные упорядочения обычно не сходно порожденные. Само значение показателя $G'_A(I)$ может служить оценкой качества искомой неравномерной аппроксимации исходной структуры предпочтений линейным порядком I.

При втором, прямо противоположном, подходе более важным считается добиться минимальных искажений в дугах, соединяющих соседние (близкие) в I объекты, а дальние связи предполагаются менее важными или вовсе игнорируются. В так возникающей модели *ближних связей* (БС), предложенной в [13, 16], оптимальным объявляется наиболее сцепленное упорядочение, т. е. такое, в котором алгебраическая сумма связей между соседними объектами максимальна:

$$G''_A(I) \triangleq \sum_{t=1}^{n-1} a_{i_t i_{t+1}} \to \max_{I \in I^*}. \tag{3.44}$$

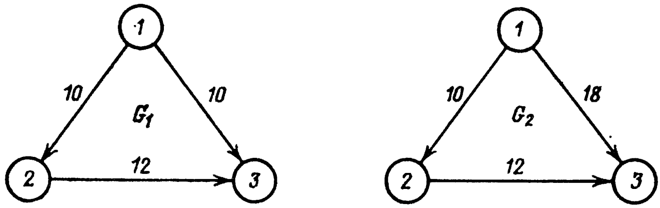
Соответствующая перестановка строк и столбцов максимизирует сумму элементов, расположенных непосредственно над главной диагональю (рис. 3.1*в*).

Использование модели БС представляется допустимым для тех же калибровок, что и ЛДС. Поскольку модель БС, очевидно, инвариантна к растяжению и сдвигу, все недиагональные элементы A могут быть сделаны положительными, после чего задача о максимально сцепленном упорядочении (3.44) становится эквивалентной поиску максимального гамильтонова пути в полученном орграфе G'. Из этого факта сразу вытекает справедливость для модели БС свойств Т и УМ.

Крупным недостатком модели БС, резко сужающим сферу ее применения, является отсутствие у нее столь важных и очевидно желательных свойств, как положительная реакция и сохранение доминирования. В качестве примера рассмотрим матрицы A_1 и A_2, заданные в одной и той же турнирной калибровке, и соответствующие структуры предпочтений (рис. 3.2).

Легко видеть, что для первой матрицы оптимально упорядочение $I_1=(1, 2, 3)$, однако переход от A_1 к A_2 (изменение результата парного сравнения между x_1 и x_2 в пользу x_1) приводит к тому, что оптимальным становится упорядочение $I_2=(2, 1, 3)$, т. е. место объекта x_1 ухудшается. Это единственное для A_2 оптимальное упорядочение, кроме того, не сохраняет доминирования $x_1 \gg x_2$, не является каноническим, кусочно-оптимальным и локально-сбалансированным, так что в модели БС свойства СД, КО, ЛС и СБ отсутствуют, а консервативность гарантируется только для простых структур (не обязательно полных). Различные оптимальные (наиболее сцепленные) упорядочения вполне могут быть и не сходно порожденными, оценок важности альтернатив (объектов) модель не предусматривает. Сам показатель $G''_A(I)$ может служить оценкой качества аппроксимации исходной структуры линейным упорядочением.

Оптимизационные задачи (3.43)—(3.44), возникающие в моделях ЛДС и БС, также NP-трудны, так что практическое получение оптимальных упорядочений в этих моделях также может оказаться весьма трудоемким. Аналогично модели МС также может быть поставлен вопрос о построении локально-оптимальных упорядочений, и выписаны необходимые и достаточные условия локальной оптималь-



$$A_1 = \begin{Vmatrix} 9 & 10 & 10 \\ 8 & 9 & 12 \\ 8 & 6 & 9 \end{Vmatrix} \qquad A_2 = \begin{Vmatrix} 9 & 10 & 18 \\ 8 & 9 & 12 \\ 0 & 6 & 9 \end{Vmatrix}$$

Рис. 3.2

ности типа (3.7) и (3.36). Для модели ЛДС такие условия оказываются слишком громоздкими для непосредственной проверки и организации прямого поиска локального оптимума. Для модели же ближних связей они имеют вполне компактный и обозримый вид и могут использоваться для практических целей:

$$\forall k,\ l=\overline{1,\ n} \quad a_{i_{k-1}i_k}+a_{i_k i_{k+1}}+a_{i_l i_{l+1}} \geqslant a_{i_{k-1}i_{k+1}}+a_{i_l i_k}+a_{i_k i_{l+1}} \tag{3.45}$$

(здесь предполагается, что при необходимости можно доопределить $\forall j=\overline{1,\ n}\quad a_{i_j i_{n+1}}=a_{i_0 i_j}=0$). Тем не менее сделать какие-либо выводы относительно показателей качества локально-оптимальных упорядочений для модели БС пока не представляется возможным.

3.2.8. Минимаксная модель (ММ). В соответствии с общими принципами, лежащими в основе минимаксных моделей, качество аппроксимации исходной структуры линейным упорядочением в ММ оценивается по величине максимального элементарного несогласия *), т. е. максимального поддиагонального элемента соответствующей преобразованной матрицы. Задача поиска оптимального упорядочения при этом формализуется в виде так называемой задачи о минимаксной триангуляции

$$K_A(I) \triangleq \max_{s=\overline{1,n}} \max_{t>s} a_{i_t i_s} \to \min_{I \in I^*}, \tag{3.46}$$

подробно исследуемой в работе [29].

Модель ММ выглядит очень простой и принципиально применима к матрицам в любой калибровке (хотя для ПС не дает осмысленных результатов). Выполнимость свойств ПР, ИС, Т и УМ вполне очевидна, справедливость свойства СБ (наличие канонических оптимальных упорядочений) легко доказывается так же, как это сделано в [9] для модели МС.

В то же время, модели ММ присущ серьезный недостаток, указывающий на чрезмерную «огрубленность» критерия $K_A(I)$. Пусть $Q=(j_1, \ldots, j_t, j_1)$ — некоторый контур в графе G, тогда введем его минимаксную оценку

$$\mu(Q) \triangleq \min_{r,\, s \in Q} \max(a_{rs}, a_{sr}). \tag{3.47}$$

Контур Q назовем определяющим, если имеет место $\forall j \notin Q$ $\max_i \max(a_{ij}, a_{ji}) \leqslant \mu(Q)$. При наличии в структуре предпочтений определяющего контура (что встречается не так уж редко) оценка $K_A(I)$ для любого упорядочения I определяется только взаимным расположением в нем объектов, входящих в этот контур, порядок же и место расположения остальных объектов вообще роли не играют. Следствием этого факта является отсутствие в модели ММ свойств ПР, КО и ЛС и лишь частичное сохранение доминирования. Действительно, рассмотрим матрицы A_3 и A_4 и соответствующие структуры предпочтений (см. рис. 3.3). Для первой из них контур $Q=(1, 2, 3, 1)$ является определяющим и $\mu(Q)=8$. Поэтому положение объекта x_4 роли не играет и, в частности, оптимальным оказывается и упорядочение $I_3=(1, 2, 3, 4)$, которое не является ни каноническим, ни кусочно-оптимальным, ни локально-сбалансированным, и не сохраняет доминирования $x_4 \gg x_3$. Переход от A_3 к A_4, сопровождающийся изменением результата парного сравнения

---

*) Краткости ради, мы рассматриваем здесь только обычную минимаксную модель типа (2.17), не касаясь минимаксных моделей дальних связей

$$\max_{r=\overline{1,n}} \max_{s>r} (s-r)\, a_{i_s i_r} \to \min_{I \in I^*} \tag{3.46'}$$

и ближних связей

$$\max_{s=\overline{1,n-1}} a_{i_{s+1} i_s} \to \min_{I \in I^*}. \tag{3.46''}$$

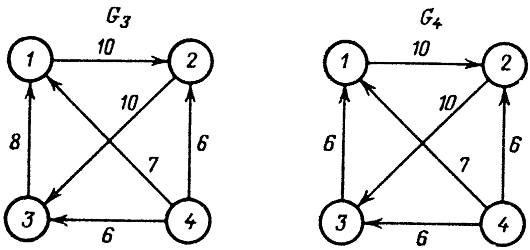
Их свойства, при желании, могут быть исследованы аналогичным образом.

между x_1 и x_3 в пользу x_1, приводит к тому, что контур Q перестает быть определяющим и единственно оптимальным становится упорядочение $I_4=(4,\ 1,\ 2,\ 3)$, в котором место x_1 ниже, чем в I_3.

При наличии в структуре предпочтений определяющего контура различные оптимальные упорядочения, к тому же, не являются сходно порожденными, так что свойство СУ в модели ММ также отсутствует.

Недостаточная чувствительность показателя K_A вызывает, кроме того, определенные сомнения в возможности его использования в качестве оценки качества аппроксимации. Оценок важности объектов модель ММ не предусматривает.

3.2.9. Модель ближайшей расплывчатой квазисерии (БРК). Модель была предложена И. Ф. Шахновым и др. [102, 141] для обработки нечетких отношений предпочтения. Матрица A при этом предполагается заданной в калибровке В, при непременном выполнении условия обратимости.



$$A_3=\begin{Vmatrix} 5 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 4 \\ 8 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 6 & 5 \end{Vmatrix} \qquad A_4=\begin{Vmatrix} 5 & 10 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 6 & 5 \end{Vmatrix}$$

Рис. 3.3

Нечеткое бинарное отношение $T=||t_{ij}||_{n\times n}$ на X названо в [102] расплывчатой квазисерией, если оно рефлексивно (т. е. $\forall i \quad t_{ii}=1$), обратимо и транзитивно (т. е. $\forall i, j, k \quad t_{ij}\geqslant\min(t_{ik},\ t_{kj})$).

Коль скоро расплывчатая квазисерия на X задана, все объекты естественным образом разбиваются на классы эквивалентности, а сами классы линейно упорядочиваются между собой. В том случае, когда все эти классы одноэлементны (невырожденный случай), так возникает некоторое линейное упорядочение; в противоположном случае возникает некоторое упорядоченное разбиение, порождающее целое семейство равно оптимальных линейных упорядочений (сходно порожденных). Одно из них при этом может быть выделено по дополнительным показателям, но обычно этого не делается и в таком вырожденном случае ограничиваются построением группового упорядочения.

На множестве нечетких бинарных отношений (и соответствующих квадратных матриц) можно ввести нехеммингову (отличную от (2.7)) метрику

$$\rho'(A, B) \triangleq \max_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}| \tag{3.48}$$

и предложить для аппроксимации исходной структуры предпочтений ближайшую в смысле (3.48) расплывчатую квазисерию $\hat{T}$:

$$\rho'(A, \hat{T}) = \min_{\{T\}} \rho'(A, T), \tag{3.49}$$

как это и было сделано в [102, 141]. Алгоритм построения ближайшей расплывчатой квазисерии приводится в [40].

Нетрудно убедиться, что свойствами ИР и ИС модель БРК не обладает (соответствующие преобразования матрицы нарушают ее калибровку), а свойства Т и УМ имеют место в тех случаях, когда оптимальное упорядочение не является выделенным. Наличие свойств ПР, СД и СБ прямо вытекает из свойств ближайшей расплывчатой квазисерии [40, 102, 141], свойства КО и ЛС гарантированы в общем случае быть не могут, равно как и свойство СУ *).

Получение количественных оценок важности объектов модель БРК не предусматривает, хотя идея «метризации» ближайшей расплывчатой квазисерии с вычислением «степеней превосходства» одного класса над другим представляется весьма перспективной.

В роли критерия, оценивающего качество аппроксимации, естественно использовать расстояние до соответствующей аппроксимирующей квазисерии. Вопрос о приближенном решении задачи (3.49) заслуживает особого изучения.

3.2.10. Потоковая модель (ПМ). Идея модели выдвинута А. А. Гвоздиком [174], предложившим потоковую интерпретацию турнирной модели упорядочения, и обобщена в [173]. В рамках ПМ неотрицательная матрица парных сравнений A интерпретируется, как матрица пропускных способностей дуг некоторой сети. Поскольку величина a_{ij} отражает степень предпочтения объекта x_i по сравнению с x_j, максимальный поток v_{ij} из вершины i в вершину j можно интерпретировать, как поток предпочтений из i в j, и ввести отношение R_v:

$$\forall i, j \quad x_i R_v x_j \Leftrightarrow v_{ij} > v_{ji}. \tag{3.50}$$

В простейшем случае, когда исходная матрица задана в калибровках ПС или Т, имеет место следующее утверждение [174]:

$$\forall i, j \quad v_{ij} - v_{ji} = s_i - s_j, \tag{3.51}$$

где s_i — строчные суммы (3.8) (интересно, что s_i здесь совпадает с полным потоком из вершины i в данной сети). Таким образом, от-

*) Последний вывод связан с тем, что и ближайших расплывчатых квазисерий может быть несколько, тогда оптимальные упорядочения, порождаемые разными квазисериями, могут оказаться и не сходно порожденными.

ношение (3.50) оказывается ацикличным, а потоковая модель в этом случае совпадает с турнирной.

В более общем случае, когда матрица задана в калибровке *ВС*, равенство (3.51) уже не имеет места, однако отношение (3.50) остается транзитивным [173], а поскольку асимметричность его очевидна, оно является частичным порядком на множестве объектов X. Таким образом, ПМ остается корректной и может считаться обобщением турнирной модели на случай калибровки типа ВС.

В случае, когда отношение (3.50) полно (т. е. является линейным порядком), соответствующее линейное упорядочение объектов и полагается оптимальным. Если же (3.50) — всего лишь частичный порядок, то его можно достроить до линейного (не единственным образом), и все такие линейные упорядочения равно оптимальны (хотя какие-то из них и могут быть выделены дополнительно).

Опишем основные свойства ПМ, следуя работе [173].

Несложно видеть, что свойство ИР имеет место, а ИС — нет. Действительно, поток v_{ij} определяется пропускной способностью минимального разреза, но такой разрез при движении из i в j может содержать иное число дуг, чем при обратном движении, так что изменение пропускной способности каждой дуги на фиксированную величину может нарушить отношение (3.50). Свойства Т, УМ и ПР сохраняются и при переходе к калибровке ВС, а вот доминирование сохраняется лишь частично (соответствующий контрпример приведен в [173]); такие свойства, как КО, ЛС и ОКА отсутствуют, а сегментируемость имеется только слабая. Модель, очевидно, не обладает и свойством СУ, но имеет место более слабое свойство: неизбежно найдется такой частичный порядок, что любое оптимальное линейное упорядочение может быть получено из него путем достройки. В качестве такого частичного порядка фигурирует само отношение (3.50).

Достоинством модели является возможность получения количественных оценок важности объектов. В простейшем случае, когда (3.50) — линейный порядок, можно предложить следующую рекуррентную схему оценки (объекты перенумерованы в соответствии с (3.50)):

$$\begin{cases} \pi_n = 0 \\ \pi_{n-1} = v_{n-1,\,n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \pi_i = \max\{\pi_j + v_{ij} \mid j = \overline{i+1,\, n}\}, \qquad i = n-2,\, n-3,\, \ldots \end{cases} \tag{3.52}$$

Таким образом, потоковая модель, совпадая с турнирной при калибровках вида Т или ПС, обобщает ее для произвольных взвешенных структур, когда использование турнирной модели мало обоснованно. Практическое использование ПМ серьезных трудностей не встречает в связи с наличием быстродействующих алгоритмов, вычисляющих с оценкой трудоемкости $O(n^3)$ все потоки v_{ij} в данной сети [114].

3.3. Некоторые итоги сравнительного анализа

Исполнение предприятия
приятно щекочет самолюбие.
Козьма Прутков («Плоды раздумья»)

Основные результаты 3.2 сведены в табл. 3.1. Как видно из нее, введенные свойства, в определенном смысле, противоречивы: ни одна из рассмотренных популярных моделей не обладает ими в полной мере. Таким образом, универсальной, наилучшей модели не существует, и выбор той или иной модели определяется спецификой конкретных задач, содержательной их интерпретацией, имеющимися вычислительными ресурсами и пр.

Перечень рассмотренных моделей, конечно, не может считаться исчерпывающим, но аналогичный анализ возможен и для не вошедших в него моделей, как уже существующих, так и вновь разрабатываемых. Хотя и перечень св йств также не претендует на полноту и, вероятно, вполне может быть расширен, на наш взгляд, он уже в настоящем виде представляет определенную ценность. Выбор модели упорядочения с теми свойствами, которые особенно желательны в данном конкретном случае, представляется весьма полезным в системах поддержки принятия решений.

При выборе конкретной модели, помимо указанных свойств, очевидно, необходимо учитывать еще и сложность, трудоемкость самого процесса получения оптимальных упорядочений. Элементарные модели спортивного типа (такие, как турнирная, ПВЛ, ПД, ИСП) позволяют быстро и легко построить оптимальное упорядочение, однако обоснование того, что именно это упорядочение должно быть оптимальным, обычно выглядит малоубедительным. Занимающие промежуточное положение модели типа БТ, БББ, СУ, РС предлагают гораздо более убедительные доводы в пользу соответствующих оптимальных упорядочений и обладают рядом дополнительных достоинств (в частности, полезным свойством ОВО); но за это приходится расплачиваться значительным усложнением процесса получения оптимального упорядочения. Наконец, сложные модели второй группы (типа МС, ЛДС и др.), также убедительно обосновывающие выбор соответствующих оптимальных упорядочений и позволяющие оценивать качество производимой аппроксимации, оказываются на практике более трудоемкими, и использование их сопряжено с решением трудных проблем комбинаторной оптимизации.

Как следует из табл. 3.1, наиболее широким комплексом желательных свойств обладает модель МС. Частичное, а не полное сохранение доминирования не должно считаться чересчур серьезным недостатком модели (тем более, что случаи, подобные описанному в п. 3.2.6, и соответствующие им оптимальные упорядочения, не сохраняющие доминирования, на практике редки). Вопрос о возможности модификации модели с целью получения в ее рамках оценок важности объектов заслуживает пристального исследования. В случае слишком больших n естественен переход к локальной модели (ЛМС).

Глава 4

ГРУППОВЫЕ УПОРЯДОЧЕНИЯ

Никак нельзя было установить, кто за кем идет по рангу, и потому обед не состоялся.

М. Твен («Банковый билет в 1 000 000 фунтов стерлингов»)

Очевидным обобщением задачи о линейном упорядочении объектов является задача об их групповом упорядочении (известная также, как задача расслоения, стратификации и т. п.), т. е. о разбиении множества объектов на определенное число пересекающихся, линейно упорядоченных между собой классов (далее именуемых стратами, или слоями). Такую задачу мы поставим и формализуем как задачу о наилучшей в том или ином смысле аппроксимации исходной структуры предпочтений некоторой слоистой структурой, т. е. о поиске оптимального упорядоченного разбиения объектов. Произвольное упорядоченное разбиение объектов будем при этом записывать в виде кортежа $\Phi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, где на страты φ_i, $i=\overline{1, m}$ накладываются обычные условия вида

$$\bigcup_{i=1}^{m} \varphi_i = X; \quad \forall i=\overline{1, m} \quad \varphi_i \neq \varnothing; \quad \forall (i \neq j) \quad \varphi_i \cap \varphi_j = \varnothing, \qquad (4.1)$$

обозначая номер места страты, куда входит объект x_t, через N_t (Φ). Понятие слоистой структуры, в соответствии с гл. 1, трактуется достаточно широко, что позволяет, при необходимости, учитывать при постановке задачи аппроксимации и дополнительные условия и требования (такие, например, как требование, чтобы итоговая аппроксиманта была графом линейного квазипорядка и т. п.).

Задача о групповом упорядочении может быть поставлена при ограничениях различного вида:

а) при отсутствии ограничений на число и мощность страт (т. е. на всем множестве Φ^* всевозможных упорядоченных разбиений);

б) при ограничениях на число страт (т. е. на множестве Φ^*_m упорядоченных разбиений на m страт);

в) при ограничениях на мощность страт типа $\forall t \quad |\varphi_t| \leqslant p$, (т. е. на соответствующем множестве $\Phi^*_{(p)}$);

г) при ограничениях обоих видов (т. е. на множестве $\Phi^*_{mp} \triangleq \triangleq \Phi^*_m \cap \Phi^*_{(p)}$).

Вводя обычным образом понятие модели группового упорядочения объектов, фиксирующей некий принцип выбора оптимальных, наиболее отвечающих исходной структуре предпочтений, упорядоченных разбиений, укажем в связи с этим, что множество таких оптимальных упорядоченных разбиений $\Phi^*_{opt}(A)$ может соответственно пониматься как собственное подмножество Φ^*, Φ^*_m, $\Phi^*_{(p)}$ или

Φ^*_{mp}, причем конкретная модель группового упорядочения может оказаться осмысленной не при всех, а лишь при некоторых типах ограничений.

Поскольку задачу о групповом упорядочении объектов можно трактовать как очевидное обобщение задачи о линейном упорядочении, представляется перспективным попробовать обобщить сформулированные в 3.1 желательные свойства с тем, чтобы использовать их для анализа моделей группового упорядочения. Ниже делается попытка построения такой обобщенной системы свойств (пополненной некоторыми специфическими «групповыми» свойствами, не имеющими «линейных» аналогов), и далее на основе такой системы анализируется несколько практически интересных моделей группового упорядочения.

Далее везде для единообразия мы будем полагать, что задача о групповом упорядочении задана при ограничениях только на число страт (т. е. на Φ^*_m); переход к ограничениям другого вида не встречает принципиальных трудностей.

4.1. Свойства моделей группового упорядочения

— У вас поразительная способность замечать мелочи,— сказал я.
— Просто я понимаю их важность.

А. Конан Дойль
(«Знак четырех»)

Целый ряд свойств моделей линейного упорядочения можно без особого труда переформулировать для моделей группового упорядочения за счет замены множества оптимальных упорядочений $I^*_{\text{opt}}(A)$ на множество оптимальных упорядоченных разбиений $\Phi^*_{\text{opt}}(A) \subset \Phi^*_m$.

1. *Инвариантность к растяжению* (ИР):

$$\forall k > 0 \quad \Phi^*_{\text{opt}}(A) = \Phi^*_{\text{opt}}(kA). \tag{4.2}$$

2. *Инвариантность к сдвигу* (ИС):

$$\forall b > 0 \quad \Phi^*_{\text{opt}}(A) = \Phi^*_{\text{opt}}(A + \|b\|_{n\times n}). \tag{4.3}$$

3. *Транспонируемость* (Т):

$$\forall \Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \quad \Phi \in \Phi^*_{\text{opt}}(A) \Leftrightarrow \Phi^T \equiv (\varphi_m, \ldots, \varphi_1) \in \Phi^*_{\text{opt}}(A^T). \tag{4.4}$$

4. *Устойчивость «в малом»* (УМ):

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in A^* \quad (\|B - A\| < \varepsilon) \Rightarrow (\Phi^*_{\text{opt}}(B) \subseteq \Phi^*_{\text{opt}}(A)), \tag{4.5}$$

где множество A^* и норма матрицы вводятся так же, как и в (3.4).

5. *Положительная реакция* (ПР). Если $\Phi \in \Phi^*_{\text{opt}}(A)$ и матрица B отличается от A лишь элементами b_{ij} и b_{ji}, причем $b_{ij} \geqslant a_{ij}$ и $b_{ji} \leqslant a_{ji}$, найдется такое упорядоченное разбиение $\Phi' \in \Phi^*_{\text{opt}}(B)$, что $N_i(\Phi') \leqslant N_i(\Phi)$.

Это дает возможность придти к следующему выводу относительно связи моделей линейного и группового упорядочения. Пусть некоторая модель группового упорядочения обладает каким-либо из свойств 1—5. Рассмотрим модель линейного упорядочения, в которой оптимальным объявляется любое упорядочение, порождаемое оптимальными для имеющейся групповой модели упорядоченными разбиениями. Тогда для такой порожденной линейной модели также будет справедливо соответствующее свойство. Примером порожденной модели может служить рассмотренная в 3.2 модель БРК.

Более сложные свойства, введенные в 3.1, требуют бóльших усилий при переформулировке и обобщении их для моделей группового упорядочения *).

6. *Сохранение доминирования* (СД). По сравнению с линейным случаем свойство должно быть несколько ослаблено: доминирующий объект должен помещаться в оптимальном упорядоченном разбиении хотя бы не ниже подчиненного (требование помещать его всегда строго выше — усиленное сохранение доминирования — выглядит чрезмерным). Понятия полного и частичного сохранения доминирования вводятся так же, как и ранее, однако связь между порождающей групповой и порожденной линейной моделями уже не так проста: из полного или частичного сохранения доминирования в порождающей модели вытекает лишь частичное его сохранение в порожденной. Для того, чтобы в порожденной модели доминирование сохранялось полностью, порождающая модель должна гарантировать усиленное его сохранение.

Практический смысл свойства СД и для групповых моделей остается тем же, что и для линейных.

7. *Сегментируемость по бикомпонентам* (СБ). Свойство также обобщается для моделей группового упорядочения. Понятие G-канонического (и G'-канонического) оптимального упорядоченного разбиения вводится так же, как в 3.1 вводились соответствующие понятия для линейных упорядочений, так что формулировка свойства легко переносится и на данный случай. Если порождающая групповая модель обладает свойством сегментируемости (слабой сегментируемости), то и порожденная линейная модель также им обладает.

Вместе с тем, практический смысл такого свойства теперь гораздо менее очевиден. Если ранее из наличия свойства сегментируемости для модели линейного упорядочения делался вывод о том, что различные бикомпоненты можно рассматривать по отдельности (правда, для того чтобы полученные фрагменты упорядочения можно было «склеить» воедино, необходимо еще и свойство КО), то теперь оснований для такого вывода меньше (различные бикомпоненты могут «зацепляться» друг за друга внутри одной страты). Чтобы поправить положение, можно ввести более сильное понятие строгого G-канонического (и G'-канонического) упорядоченного

*) В пределах настоящей главы, краткости ради, вместо «модель линейного упорядочения объектов» (или «модель группового упорядочения объектов») будет использоваться просто «линейная (групповая) модель».

разбиения (т. е. такого, в котором объекты из бикомпоненты с бо́льшим номером не только не предшествуют, но и не соседствуют внутри одной и той же страты с объектами из бикомпонент с меньшими номерами) и связать с ним более сильное свойство строгой (или слабой строгой) сегментируемости, однако и для так получаемого свойства прежний практический смысл уже не сохраняется, причем существование реальных моделей, им обладающих, пока не доказано. Действительно, говорить о строгой (или слабой строгой) сегментируемости вообще можно лишь в том случае, когда число бикомпонент в графе G (или соответственно G') не превосходит требуемого числа страт m. Если число бикомпонент k равно m, то из строгой (слабой строгой) СБ сразу следует, что разбиение на бикомпоненты уже дает оптимальное упорядоченное разбиение; если же $k<m$, то даже наличие свойства строгой (слабой строгой) СБ не дает возможности провести декомпозицию задачи, ибо заведомо не известно, сколько страт должна занимать та или иная бикомпонента.

Итак, свойство СБ (слабой СБ) и для групповых моделей остается желательным, указывает на логичность, разумность принципов выбора оптимальных упорядоченных разбиений в данной модели; но оно уже не открывает путей к декомпозиции задачи.

Для линейных моделей из свойств СБ вытекало еще и наличие более слабого свойства консервативности, согласно которому, если исходная структура сама задает линейный порядок (возможно, не единственным образом), то соответствующее упорядочение (хотя бы одно из таковых) оптимально для данной модели. В принципе, аналогичное свойство более общего вида может быть сформулировано и для групповых моделей. Пусть исходная структура предпочтений сама является слоистой и содержит k слоев. Тогда модель назовем *консервативной*, если:

а) при $k=m$ исходная структура сама является оптимальной;

б) при $k>m$ оптимальная структура может быть получена из исходной за счет агрегирования некоторых соседних слоев;

в) при $k<m$ оптимальная структура может быть получена из исходной за счет дополнительного расслоения некоторых слоев.

Для групповых моделей, однако, консервативность уже не является следствием СБ. Напротив, если исходная структура односторонне связна (т. е. любые две вершины соединены путем хотя бы в одном направлении), то из консервативности модели вытекает и свойство СБ (так как в этом случае слои, очевидно, соответствуют бикомпонентам графа G) и, более того, даже строгая СБ. В то же время, консервативность порождающей групповой модели, очевидно, обязательно влечет за собой консервативность порожденной линейной модели.

8. *Кусочная оптимальность* (КО). Обобщение свойства на рассматриваемый случай вполне очевидно: если упорядоченное разбиение $\Phi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ оптимально для матрицы A среди всех упорядоченных разбиений из Φ_m^*, то произвольный его связный фрагмент $(\varphi_p, \ldots, \varphi_{p+k-1})$ должен быть оптимальным для соответствующей подматрицы среди всех упорядоченных разбиений из Φ_k^*, $k<m$.

Легко убедиться в том, что из наличия свойства КО для порождающей групповой модели не следует его справедливость для порожденной линейной модели. Само по себе, свойство КО и для групповых моделей выглядит достаточно сильным, хотя реальные модели, им обладающие, существуют.

9. *Локальная сбалансированность* (ЛС). Обобщая определение группового доминирования (3.6), будем полагать, что подмножество $Y_1 \subset X$ доминирует над подмножеством $Y_2 \subset X$, если $\forall x_i \in Y_1$ $x_i \gg Y_2$. Тогда свойство ЛС легко может быть обобщено и переформулировано в виде условия, предписывающего для любого оптимального упорядоченного разбиения выполнение соотношения

$$\forall k < m \quad \forall p \leqslant m-k \quad \varphi_k \gg \bigcup_{t=k+1}^{k+p} \varphi_t, \tag{4.6}$$

вполне аналогичного (3.7).

Интерес, однако, представляет и более сильное свойство

$$\forall k < m \quad \forall t \in (k,\ m] \quad \varphi_k \gg \varphi_t, \tag{4.7}$$

впервые введенное в [19]. Если в модели группового упорядочения любое оптимальное упорядоченное разбиение удовлетворяет (4.7), то свойство ЛС заведомо имеет место. Такое усиленное свойство, естественно, назвать *сохранением группового доминирования* (СГД).

В общем случае наличие у модели группового упорядочения свойств ЛС или СГД не гарантирует выполнение свойства ЛС в порожденной линейной модели. Локально-сбалансированными заведомо оказываются лишь некоторые фрагменты оптимального упорядочения.

10. *Получение количественных оценок важности страт* (ОВС). Для моделей группового упорядочения интерес представляют уже не оценки важности отдельных объектов, а оценки различных страт (групп) в оптимальном упорядоченном разбиении (внутри отдельной страты φ_i оценки объектов могут и не даваться, либо все объекты могут быть признаны равнозначными). Наличия свойства ОВС (т. е. возможности получения количественных оценок важности страт) у групповой модели, вообще говоря, недостаточно для выполнения в порожденной линейной модели свойства оценки важности объекта.

11. *Сходство различных оптимальных упорядоченных разбиений* (СУР). Выше при анализе сходства различных оптимальных линейных упорядочений использовалось понятие сходной порожденности. Для упорядоченных разбиений также может быть введено аналогичное понятие.

Два упорядоченных разбиения Φ_1, $\Phi_2 \in \Phi_m^*$ назовем сходно порожденными, если найдется такое разбиение $\Psi \in \Phi_p^*$, $p<m$, что и Φ_1 и Φ_2 могут быть получены из Ψ за счет дополнительного расслоения некоторых страт. Если в некоторой модели группового упорядочения все оптимальные упорядоченные разбиения оказываются сходно порожденными с одним и тем же порождающим упорядоченным разбиением Ψ, то это может рассматриваться, как своего рода

указание на необходимость изменить ограничения на число страт (т. е. от Φ^*_m перейти к Φ^*_p, $p<m$, полагая, что $\Psi\in\Phi^*_p$ оптимально в этом множестве для матрицы A).

Понятно, что если все оптимальные упорядоченные разбиения сходно порожденные, то и в порожденной линейной модели все упорядочения из $I^*_{\text{opt}}(A)$ также оказываются порожденными тем же разбиением Ψ, так что свойство СУ выполняется.

Кроме такого определения сходства упорядоченных разбиений (и соответствующего ему свойства СУР), возможен и несколько иной подход. Два упорядоченных разбиения $\Phi_{1,2}$ назовем сходно порождающими, если найдется линейное упорядочение I, которое может быть порождено как из Φ_1, так и из Φ_2. Простейшим примером могут служить разбиения $\Phi_1=(1,(2, 3))$ и $\Phi_2=((1, 2), 3)$, порождающее одно и то же упорядочение $I=(1, 2, 3)$.

Если в модели все оптимальные упорядоченные разбиения оказываются сходно порождающими с одним и тем же порожденным упорядочением I, то такое их сходство также можно трактовать как некоторое свойство модели (далее обозначаемое СУР′). Вопрос о том, насколько его можно интерпретировать как указание перейти от задачи о групповом упорядочении к более сильной задаче о линейном упорядочении, считая ее оптимальным решением упорядочение I, заслуживает внимательного исследования.

12. *Оценка качества аппроксимации* (ОКА). Возможность количественно оценить качество аппроксимации исходной структуры предпочтений слоистой структуры, отвечающей тому или иному упорядоченному разбиению, и здесь оказывается весьма важным свойством модели. Наличие свойства ОКА у групповой модели, к сожалению, не гарантирует его наличия у порожденной линейной модели.

Помимо перечисленных свойств, в той или иной мере сходных с аналогичными свойствами моделей линейного упорядочения, можно указать еще некоторые специфические «групповые» свойства.

13. *Устойчивость к свертке и развертке* (УСР). Пусть $\Phi^*_{\text{opt}}(A, m)$ — множество оптимальных для некоторой модели упорядоченных разбиений на m страт, $2\leqslant m\leqslant n-1$. Произвольное упорядоченное разбиение Φ назовем допускающим свертку, если найдется некоторое Ψ_1 из $\Phi^*_{\text{opt}}(A, m-1)$, которое может быть получено из Φ путем объединения двух соседних страт. Аналогично Φ назовем допускающим развертку, если найдется некоторое $\Psi_2\in\Phi^*_{\text{opt}}(A, m+1)$, которое может быть получено из Φ путем дихотомии одной из страт. Модель группового упорядочения назовем устойчивой к свертке, если при любом $m=\overline{2, n-1}$ в множестве $\Phi^*_{\text{opt}}(A, m)$ всегда найдется разбиение, допускающее свертку, и устойчивой к развертке, если в $\Phi^*_{\text{opt}}(A, m)$ всегда найдется разбиение, допускающее развертку. Поскольку очевидно, что из устойчивости к свертке всегда следует и устойчивость к развертке и наоборот (и то и другое легко доказывается от противного), эти два свойства целесообразно объединить в одно свойство УСР.

Модель назовем сильно устойчивой к свертке и развертке, если в $\Phi^*_{\text{opt}}(A, m)$ всегда найдется разбиение, допускающее и свертку, и развертку.

Смысл вводимых свойств УСР и сильной УСР вполне очевиден. При наличии свойства УСР по известному множеству $\Phi^*_{\text{opt}}(A, m)$ (обычно не слишком обширному) заведомо можно получить хотя бы по одному оптимальному разбиению на $m+1$ и $m-1$ классов. Сильная УСР открывает возможность построения цепочки упорядоченных разбиений $\Phi_{(2)}, \Phi_{(3)}, \ldots, \Phi_{(k)}, \ldots$, каждый член $\Phi_{(m)} \in \Phi_m$ которой получается из предыдущего путем элементарной дихотомии одного из классов и входит в соответствующее оптимальное множество $\Phi^*_{\text{opt}}(A, m)$. Движение вдоль цепочки, в соответствии с идеями гл. 1, может при этом трактоваться как последовательная аппроксимация исходной структуры предпочтений все более подробными слоистыми структурами в рамках схемы последовательной дихотомии.

Здесь мы неявно предполагали, что рассматриваемая модель пригодна для решения задачи о групповом упорядочении с произвольным числом классов m, причем при $m=1$ она становится тривиальной, а при $m=n$ превращается в модель линейного упорядочения. В тех же случаях, когда модель определена не для всех значений m, область изменения m в определении свойства УСР должна быть соответственно изменена, а цепочка последовательной дихотомии также становится короче.

Рассмотрим в заключение еще два свойства, для формулировки которых введем вначале понятие степени превосходства одной страты над другой. Будем полагать, что для произвольных различных страт φ_k и φ_l может быть введена некоторая числовая характеристика p_{kl}, оценивающая тем или иным способом общее превосходство φ_k над φ_l (и аналогичная характеристика p_{lk}). Конкретный вид формулы для ее вычисления зависит от калибровки исходной матрицы A: так, для простых структур можно предложить формулу вида

$$p_{kl} \triangleq \frac{1}{2}\left[\operatorname{sign} \sum_{i\in\varphi_k} \sum_{j\in\varphi_l} (a_{ij}-a_{ji})+1\right]; \ \forall k,\ l; \tag{4.8}$$

для кососимметрической калибровки —

$$p_{kl} \triangleq \sum_{i\in\varphi_k} \sum_{j\in\varphi_l} a_{ij}; \ \forall k,\ l; \tag{4.9}$$

для степенно́й —

$$p_{kl} \triangleq \prod_{i\in\varphi_k} \prod_{j\in\varphi_l} a_{ij}; \ \forall k,\ l, \tag{4.10}$$

и т. д. Предложенные формулы приводят к построению матрицы имеющей ту же калибровку, что и A, хотя, вообще говоря, это требование не обязательно, так что могут использоваться и другие формы, отличные от (4.8)—(4.10).

14. *Устойчивость к стягиванию страт* (УСС). Вычисление матрицы $P=\|p_{kl}\|_{m\times m}$ приводит к тому, что на множестве $\{\varphi_1, \ldots$

$\ldots, \varphi_m\}$ задается некоторая структура предпочтений. Пусть $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — оптимальное упорядоченное разбиение для некоторой модели, причем эта модель применима для решения задачи о линейном упорядочении объектов к структуре, описываемой матрицей P. Тогда если обозначить через y_t объект, отвечающий в этой структуре страте φ_t, то упорядочение $J \triangleq (y_1, \ldots, y_m)$ должно быть оптимальным с точки зрения рассматриваемой модели, т. е.

$$J \triangleq (y_1, \ldots, y_m) \in I^*_{\text{opt}}(P).$$

Свойство УСС выглядит совершенно очевидным, однако для реальных моделей группового упорядочения выполняется далеко не всегда.

15. *Непротиворечивость группового превосходства* (НГП). Модель группового упорядочения обладает свойством НГП, если для произвольного оптимального для нее упорядоченного разбиения $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ имеет место следующий факт: степень p_{kl} превосходства произвольной вышележащей страты φ_k над нижележащей стратой φ_l всегда не ниже степени обратного превосходства p_{lk}. Тем самым отношение превосходства, индуцируемое матрицей P на множестве полученных страт, оказывается ациклическим, а имеющееся упорядоченное разбиение Φ представляет собой линейный порядок, согласованный с этим отношением. Если же $\forall k, l$ $k<l \Rightarrow p_{kl} > p_{lk}$, то само отношение превосходства уже представляет собой линейный порядок (сильная НГП).

Можно указать на связь так вводимого свойства с сохранением группового доминирования. Если модель обладает свойством СГД (4.7), а для вычисления степеней превосходства страт используется формула (4.9), то можно гарантировать выполнение и свойства НГП. В то же время свойство НГП выглядит несколько более слабым и представляет самостоятельный интерес.

Несомненна и взаимосвязь таких свойств, как УСС, НГП и консервативность. Если модель консервативна и m не превосходит числа слоев в исходной структуре, то разумно полагать *), что хотя бы в одном из оптимальных упорядоченных разбиений (но не обязательно во всех!), действительно, имеет место $\forall k, l$ $k<l \Rightarrow p_{kl} \geqslant p_{lk}$ и индуцированное отношение превосходства ациклическое, что роднит консервативность и НГП. Если же и консервативность, и НГП имеют место, причем модель применима для решения задачи о линейном упорядочении объектов в структуре, описываемой матрицей P, то выполняется и УСС, поскольку упорядочение $J = (y_1, \ldots, y_m)$ при этом оказывается первичным.

Информация о взаимосвязи между введенными свойствами линейных и групповых моделей собрана в табл. 4.1. Первый ее

---

*) Такое предположение основывается на том, что для «разумных» способов вычисления степеней превосходства одной страты над другой (в том числе и для способов (4.8) — (4.10)) степень превосходства вышележащей бикомпоненты над нижележащей должна быть, разумеется, выше степени обратного превосходства.

Таблица 4.1

Взаимосвязь введенных свойств моделей линейного и группового упорядочения

Свойства линейных моделей	Свойства групповых моделей	Связь между свойствами
ИР	ИР	$ИР_г \to ИР_л$
ИС	ИС	$ИС_г \to ИС_л$
Т	Т	$Т_г \to Т_л$
УМ	УМ	$УМ_г \to УМ_л$
ПР	ПР	$ПР_г \to ПР_л$
СД	СД Усиленное СД	$СД_г \to$ частичное $СД_л$ Усиленное $СД_г \to СД_л$
СБ	СБ Строгая СБ	$СБ_г \to СБ_л$ Строгая $СБ_г \to СБ_л$
Консервативность	Консервативность	$Консерв._г \to Консерв._л$
КО	КО	—
ЛС	ЛС	$ЛС_г \to$ частичная $ЛС_л$
	СГД	СГД
ОВО	ОВО	—
СУ	СУР СУР′	$СУР_г \to СУ_л$
ОКА	ОКА	—
—	УСР	—
—	УСС	—
—	НГП	—

столбец указывает определенное свойство линейной модели, во втором приводятся обобщения и аналоги этого свойства для моделей группового упорядочения. В третьем столбце указывается связь между свойствами порождающей групповой модели (с индексом «г») и порожденной линейной (с индексом «л»).

4.2. Максимально согласованные слоистые структуры

Согласие есть продукт при полном непротивлении сторон.

И. Ильф, Е. Петров («Двенадцать стульев»)

Переходя к рассмотрению конкретных моделей группового упорядочения, выделим, в первую очередь, представляющиеся наиболее логичными модели, связанные с построением максимально согласованных слоистых структур (с фиксированным числом слоев m). Как было показано в гл. 2, возможны два различных подхода к определению наиболее согласованных структур: в первом случае (максимальное совпадение) выбирается структура, совпадающая с исходной по множеству дуг максимально возможного суммарного веса (и являющаяся ближайшей к исходной структуре предпочтений в смысле введенной метрики (2.7)); во втором (минимальное рассогласование) — структура с минимально возможным суммарным весом элементарных несогласий. Для линейных упорядочений (см. п. 3.2.6) эти подходы эквивалентны, так что максимально совпадающее с исходной структурой упорядочение одновременно оказывается и минимально рассогласованным; для данного же случая дело обстоит совсем по-иному.

Пусть $\Phi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — некоторое упорядоченное разбиение. Обозначим через $S_1(\Phi)$ сумму весов дуг, ведущих из верхних страт в нижние, через $S_2(\Phi)$ — сумму весов обратных дуг, а через $S_3(\Phi)$ — сумму весов дуг, оба конца которых оказываются внутри одной и той же страты. Тогда задача о построении максимально совпадающей слоистой структуры типа квазисерии формализуется в виде

$$S_1(\Phi) \to \max_{\Phi \in \Phi_m^*}, \tag{4.11}$$

а задача о построении максимально совпадающей слоистой структуры промежуточного типа — в виде

$$S_1(\Phi) + S_3(\Phi) \to \max_{\Phi \in \Phi_m^*}. \tag{4.12}$$

Аналогично формализуются и задачи поиска минимально рассогласованных структур:

$$2S_2(\Phi) + S_3(\Phi) \to \min_{\Phi \in \Phi_m^*} \tag{4.13}$$

— для структуры типа квазисерии;

$$S_2(\Phi) \to \min_{\Phi \in \Phi_m^*} \tag{4.14}$$

— для структуры промежуточного типа.

Поскольку $S_1(\Phi)+S_2(\Phi)+S_3(\Phi)=S$ — общая сумма весов дуг в исходной структуре — постоянна и от разбиения не зависит, задачи (4.12) и (4.14) эквивалентны. Таким образом, для структур промежуточного типа максимально совпадающая и минимально рассогласованная структуры совпадают (что не должно удивлять), а для структур типа квазисерии эти подходы различны, что подтверждается различием в задачах (4.11) и (4.13).

Введем в рассмотрение вспомогательные матрицы $B=\|b_{ij}\|_{n\times n}$ и $D=\|d_{ij}\|_{n\times n}$ с элементами

$$b_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & \text{если} \quad a_{ij} > a_{ji}, \\ 0, & \text{если} \quad a_{ij} \leqslant a_{ji} \end{cases} \tag{4.15}$$

и

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если} \quad a_{ij} > a_{ji}, \\ 0, & \text{если} \quad a_{ij} = a_{ji}, \\ -a_{ji}, & \text{если} \quad a_{ij} < a_{ji} \end{cases} \tag{4.16}$$

и перегруппируем в них строки и столбцы, агрегируя их в блоки согласно с упорядоченным разбиением Ф. Тогда сумма элементов наддиагональных блоков преобразованной матрицы B, очевидно, равна просто $S_1(\Phi)$ и задачу (4.11) можно, обозначая эту сумму через $H_B(\Phi)$, переписать в более обозримом стандартном виде:

$$H_B(\Phi) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=r+1}^{m} \sum_{i \in \varphi_r} \sum_{j \in \varphi_s} b_{ij} \to \max_{\Phi \in \Phi_m^*}. \tag{4.17}$$

Точно так же можно видеть, что аналогичная сумма для матрицы D равна просто $S_1(\Phi) - S_2(\Phi)$, а поскольку задача (4.13) эквивалентна задаче $S - 2S_2(\Phi) - S_3(\Phi) \to \max$, т. е. $S_1(\Phi) - S_2(\Phi) \to \max$, ее можно переписать в точно таком же виде:

$$H_D(\Phi) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=r+1}^{m} \sum_{i \in \varphi_r} \sum_{j \in \varphi_s} d_{ij} \to \max_{\Phi \in \Phi_m^*}. \tag{4.18}$$

Наконец, заметив, что сумма элементов наддиагональных и диагональных блоков матрицы B равна $S_1(\Phi) + S_3(\Phi)$ (для матрицы D сумма этих элементов не отличается от $H_D(\Phi)$, так как D кососимметрична), задачу (4.12) можно переписать в виде

$$S_1(\Phi) + S_3(\Phi) \equiv H_B(\Phi) + S_3(\Phi) = \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=r}^{m} \sum_{i \in \varphi_r} \sum_{i \in \varphi_s} b_{ij} \to \max_{\Phi \in \Phi_m^*}. \tag{4.19}$$

Хотя задачи (4.17)—(4.19) имеют, вообще говоря, разные оптимальные решения (и, соответственно, модели группового упорядочения, опирающиеся на эти формальные постановки, различны),

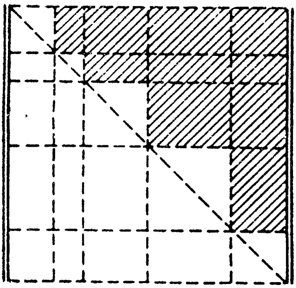


Рис. 4.1

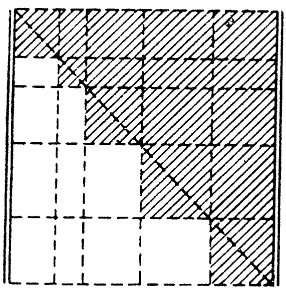


Рис. 4.2

математическая их форма очень близка. Задачи (4.17) и (4.18) предусматривают максимизацию суммы элементов наддиагональных блоков соответствующим образом преобразованных матриц B или D (рис. 4.1), т. е. *наилучшую приближенную блочную триангуляцию* (*нпб*-триангуляцию) матриц B или D. В (4.19) предусматривается максимизация суммы элементов наддиагональных и диагональных блоков B (расширенная *нпб*-триангуляция, рис. 4.2) или, что то же, минимизация суммы элементов поддиагональных блоков.

При $m=n$ (4.17)—(4.19) переходят в обычные задачи *нп*-триангуляции матриц B или D, которые эквивалентны друг другу и эквивалентны *нп*-триангуляции A (3.26) в силу наличия в линейной модели МС свойств ИР, ИС и калибровочной инвариантности. Соответствующие модели при этом переходят в обычную линейную модель МС.

Итак, обобщениями линейной модели МС являются три различных групповых модели, предусматривающие *нпб*-триангуляцию и расширенную *нпб*-триангуляцию матриц B и D и приводящие к задачам (4.17)—(4.19). На практике нередко предлагается осуществлять *нпб*-триангуляцию самой исходной матрицы A (что при $m=n$ также сводится к (3.26)); для матриц типа ПС (когда $A=B$) и для кососимметрических матриц (когда $A=D$) такая модель переходит в одну из этих трех, но для турнирных матриц она, на наш взгляд, не выглядит достаточно обоснованной.

Свойства задач (4.17)—(4.19) и соответствующих групповых моделей МС исследовались достаточно широко [13, 14, 18—20, 99, 104, 105] и др. Рассмотрим их в порядке введения, на примере модели минимально рассогласованной квазисерии (4.18), поскольку остальные две модели с ней схожи.

Инвариантность модели к растяжению достаточно очевидна, а вот свойство ИС отсутствует. Это связано с тем, что для различных упорядоченных разбиений в функционал (4.18) может входить различное число слагаемых, так что при сдвиге то разбиение, которое ранее не было оптимальным, может стать им и наоборот. Калибровочной инвариантностью модель также не обладает. В свете этого ее использование представляется возможным лишь для калибровок типа ПС, Т, К, но не ВС.

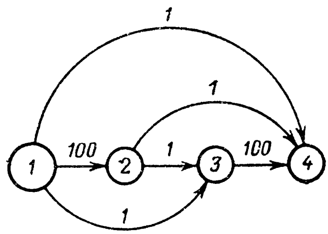


Рис. 4.3

Заметим, что транспонирование матрицы A приводит к транспонированию и матриц B и D, так что свойство Т легко доказывается от противного, то же справедливо и для свойства ПР. Свойство УМ доказывается практически так же, как и для линейной модели. Рассуждая аналогично п. 3.2.6, можно убедиться и в том, что доминирование в групповых моделях МС сохраняется лишь частично, а усиленное СД места не имеет.

Чтобы убедиться в том, что модель (4.18) не является консервативной, рассмотрим структуру предпочтений, изображенную на рис. 4.3, и поставим для нее задачу (4.18) при $m=2$. Очевидно, что единственно оптимальным является упорядоченное разбиение $\Phi = (\{1, 3\}, \{2, 4\})$, но оно не каноническое. Тот же пример уместен и для модели (4.17), и лишь для (4.19) среди оптимальных оказываются все три канонических упорядоченных разбиения: $\Phi_1 = (\{1\}, \{2, 3, 4\})$; $\Phi_2 = (\{1, 2\}, \{3, 4\})$ и $\Phi_3 = (\{1, 2, 3\}, \{4\})$. Но консервативность (и соответственно, наличие свойства СБ) для модели (4.19), предусматривающей минимизацию суммы весов обратных дуг $S_2(\Phi)$, действительно, очевидна.

Свойство КО для всех трех моделей легко доказывается от противного, а вот свойства ЛС и СГД, в общем случае, не выполняются. Условиями локальной оптимальности для произвольного упорядоченного разбиения в модели (4.17) служит соотношение

$$\forall k = \overline{1, m-1} \quad \forall l = \overline{k+1, m} \quad \forall i \in \varphi_k$$
$$\sum_{t=k+1}^{l} \sum_{j \in \varphi_t} b_{ij} \geqslant \sum_{t=k}^{l-1} \sum_{j \in \varphi_t} b_{ji} \tag{4.20}$$

(невыгодность переносов «сверху вниз») и аналогичное ему соотношение

$$\forall k = \overline{1, m-1} \quad \forall l = \overline{k+1, m} \quad \forall j \in \varphi_l$$
$$\sum_{t=k}^{l-1} \sum_{i \in \varphi_t} b_{ij} \geqslant \sum_{t=k+1}^{l} \sum_{i \in \varphi_t} b_{ji} \tag{4.21}$$

(невыгодность переносов «снизу вверх»). Для модели (4.18) соответствующие неравенства получаются из (4.20) и (4.21) простой заменой всех b_{ij} на d_{ij}, а для модели (4.19) t везде пробегает значения от $k+1$ до $l-1$ (соответственно, $k = \overline{1, m-2}$; $l = \overline{k+2, m}$). Формулы (4.20)—(4.21) и им аналогичные обобщают соответствующие условия локальной оптимальности для модели МС и могут использоваться для построения локально-оптимальных упорядоченных разбиений, однако выполнения свойства ЛС из них уже не следует.

И. Ф. Шахновым и др. [19, 20] был предложен вариант групповых моделей МС, в котором максимум в (4.17)—(4.19) ищется не на всем множестве Φ_m^*, но лишь среди упорядоченных разбиений, сохраняющих групповое доминирование, т. е. удовлетворяющих (4.7). В таких моделях *группового доминирования* (ГД) свойство СГД заведомо выполняется, а значит, имеет место и ЛС. Недостатком моделей ГД следует считать то, что множество $\overline{\Phi_m^*}$ упорядоченных разбиений, сохраняющих групповое доминирование, для некоторых исходных матриц может оказаться пустым, т. е. модели ГД применимы не для всех m и не для всех исходных матриц. Кроме того, достигаемые в моделях ГД максимумы показателей качества $H_B(\Phi)$, $H_D(\Phi)$ и $H_B(\Phi)+S_3(\Phi)$ оказываются (за счет сужения множества рассматриваемых вариантов) значительно меньшими, чем в моделях МС, так что использование моделей ГД сопряжено, таким образом, с внесением в исходную структуру значительно бо́льших суммарных искажений (хотя и более равномерно распределенных). В связи с этими недостатками, модели ГД представляется более целесообразным применять без ограничений на число слоев (т. е. на всем множестве упорядоченных разбиений, сохраняющих доминирование: такое множество $\overline{\Phi^*}$ заведомо не пусто), что позволит, варьируя число слоев, уменьшить вносимые искажения.

Групповые модели МС, как и линейная модель, обычно не предусматривают вычисления каких-либо количественных оценок важности. Однако для моделей ГД, обладающих свойствами СГД и НГП, такие оценки могут быть введены рекуррентно, оценка π_m важности класса φ_m принимается равной 0, оценка π_{m-1} важности класса φ_{m-1} полагается равной $p_{m-1,\,m}$, а для произвольного $k< <m-1$ оценка важности класса φ_k вычисляется по формуле

$$\pi_k = \max_{l=\overline{k+1,\, m}} \{\pi_l + p_{kl}\}, \qquad k=\overline{1,\ m-2}, \tag{4.22}$$

где предполагается, что степени превосходства вычисляются в соответствии с (4.9) или с аналогичной формулой, пригодной для турнирных матриц:

$$p_{kl} = \sum_{i\in\varphi_k} \sum_{j\in\varphi_l} (a_{ij} - a_{ji}). \tag{4.23}$$

При тех же предположениях групповые модели МС устойчивы к стягиванию страт (модели ГД этим свойством не обладают, ибо для задачи о линейном упорядочении непригодны); кроме того, модели ГД обладают и свойством НГП (как следствие из СГД), групповые же модели МС этим свойством не обладают.

Нетрудно убедиться, что модели МС и ГД не обладают ни свойством СУР, ни свойством СУР$'$. В качестве функционала, оценивающего качество аппроксимации исходной структуры, могут использоваться непосредственно показатели $H_B(\Phi)$, $H_D(\Phi)$ или $H_B(\Phi)+ +S_3(\Phi)$, так что свойство ОКА имеет место.

Очевидно, что модели ГД не являются устойчивыми к свертке и развертке. Покажем, что и групповые модели МС (4.17) и (4.18) также не обладают свойством УСР. Вновь рассмотрим структуру предпочтений, изображенную на рис. 4.3, и поставим для нее задачу вида (4.17) или (4.18) при $m=4$. Оптимум достигается при $\Phi_{(4)} = (\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\})$. Переход к $m=3$ приводит к оптимальному упорядоченному разбиению, $\Phi_{(3)}=(\{1\},\ \{2,\ 3\},\ \{4\})$, которое может быть получено, как свертка $\Phi_{(4)}$, но дальнейший переход к $m=2$ приводит к оптимуму $\Phi_{(2)}=(\{1,\ 3\},\ \{2,\ 4\})$, которое не может быть развернуто в $\Phi_{(3)}$. Вопрос о наличии свойства УСР у модели (4.19) требует дополнительного изучения.

Задачи *нпб*-триангуляции (4.17)—(4.18) и расширенной *нпб*-триангуляции (4.19), возникающие в групповых моделях МС и ГД, также как и соответствующая задача (3.26) для линейной модели, представляют собой NP-трудные оптимизационные проблемы, и получение точных решений представляется возможным лишь при не очень больших значениях n. Рассмотрим один из возможных алгоритмов решения задачи (4.18), использующий идеи метода ветвей и границ и описанный в [17].

В предлагаемом алгоритме произвольное упорядоченное разбиение $\Phi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ задается вектором $\varkappa=(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$, где $\varkappa_i = N_i(\Phi)$ — номер подмножества (страты), в которую попадает x_i. На каждом шаге ветвления производится выбор подмножества, в которое попадает очередной объект, т. е. фиксируется значение очередной компоненты вектора $\varkappa$.

Корень дерева вариантов — единственная вершина $\varnothing$ уровня 0 — отвечает ситуации, когда все объекты еще свободны. Произвольному узлу k-го уровня отвечает ситуация, когда объекты $x_1, \ldots, x_k$ уже размещены, т. е. первым k компонентам $\varkappa$ уже приданы некоторые значения $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$, прочие же объекты свободны. Ветвление (переход к дочернему узлу $(k+1)$-го уровня) состоит в фиксации значения $\varkappa_{k+1}$, т. е. в размещении объекта x_{k+1}. При достижении узла n-го уровня все упорядоченное разбиение оказывается построенным. Узлу k-го уровня может быть приписан показатель, оценивающий сверху значение функционала $H_D(\Phi)$ для всех упорядоченных разбиений, у которых векторы $\varkappa$ начинаются с фиксированных в данном узле значений $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$, т. е. висячих вершин дерева вариантов, достижимых из данного узла:

$$Q(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k) = Q_1(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k) + Q_2(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k) + Q_3(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k). \tag{4.24}$$

Здесь первое слагаемое равно

$$Q_1(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k) = \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{s=r+1}^{k} d_{rs} \operatorname{sign}(\varkappa_s - \varkappa_r) \tag{4.25}$$

и оценивает вклад в показатель качества $H_D(\Phi)$ от сравнений всех зафиксированных объектов между собой, второе слагаемое

$$Q_2(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k) = \sum_{r=k+1}^{n} \max_{j=\overline{1,\, m}} \sum_{s=1}^{k} d_{rs} \operatorname{sign}(\varkappa_s - j) \tag{4.26}$$

оценивает вклад от сравнений между зафиксированными и свободными объектами, наконец, третье слагаемое

$$Q_3(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k) = \sum_{r=k+1}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} |d_{rs}| \tag{4.27}$$

дает оценку вклада от сравнения свободных объектов между собой. При переходе к дочернему узлу $(k+1)$-го уровня оценка (4.25) пересчитывается рекуррентно

$$Q_1(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k, \varkappa_{k+1}) = Q_1(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k) + \sum_{s=1}^{k} d_{s,\, k+1} \operatorname{sign}(\varkappa_{k+1} - \varkappa_s), \tag{4.28}$$

а (4.26) частью пересчитывается, частью вычисляется заново. Что до оценки (4.27), то она зависит только от первоначальной нумерации объектов и от номера уровня, а не от конкретного узла $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k)$, так что для всех уровней такие оценки могут быть вычислены заранее.

Выбранная стратегия близка к идеям скорейшего спуска и заключается в следующем. Ветвление из узла $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k)$ в дочерний узел $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{k+1})$ допустимо, если:

— узел $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{k+1})$ еще не использовался для ветвления;

— оценка $Q(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{k+1})$ превосходит текущее рекордное значение.

Из всех допустимых узлов для ветвления используется тот, у которого оценка (4.24) максимальна. Если же допустимых дочерних узлов более нет, то поддерево с корнем в данном узле отсекается, как не содержащее перспективных вариантов, и происходит возврат к материнскому узлу (k—1)-го уровня, в котором сохраняются все имевшиеся там оценки.

При достижении узла n-го уровня оценка (4.24) совпадает с $H_D(\Phi)$. Если текущее рекордное значение превзойдено, фиксируется новый рекорд, после чего в любом случае происходит возврат к материнскому узлу (n—2)-го уровня (возвращаться на (n—1)-й уровень бессмысленно, так как из способа построения оценки (4.26) видно, что первый из рассматривавшихся на этом уровне вариантов ветвления — заведомо наилучший, так что рассматривать остальные нет необходимости).

Ветвление начинается в корне дерева, когда все объекты свободны, так что $Q_1(\varnothing)=Q_2(\varnothing)=0$, а оценка имеет вид

$$Q(\varnothing) \equiv Q_3(\varnothing) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} |d_{rs}|. \tag{4.29}$$

Закончить ветвление следует, когда при очередном возвращении в вершину $\varnothing$ выясняется, что все допустимые варианты ветвления уже перебраны.

Перед началом ветвления целесообразно построить локально-оптимальное упорядоченное разбиение, удовлетворяющее условиям типа (4.20)—(4.21), используемое в качестве начального рекорда, что позволит выбрать нумерацию объектов и сократить перебор вариантов. Такое упорядоченное разбиение строится аналогично локально-оптимальному упорядочению в п. 3.2.6, и поиск его не требует много времени. Вместе с тем для него показатель $H_D(\Phi)$ достаточно велик, что значительно уменьшает объем перебора.

Как несложно видеть, описанный алгоритм легко преобразуется и для решения задач (4.17) и (4.19). Так, заменяя все d_{rs} на b_{rs}, для (4.17) достаточно убрать знак модуля в (4.27), а функцию Sign в (4.25), (4.26) и (4.28) заменить на обычным образом определяемую тэта-функцию, равную единице при положительных значениях аргумента и нулю — при остальных. Аналогично следует поступать и для задачи (4.19), с той лишь разницей, что вместо тэта-функции используется функция, равная единице при неотрицательных значениях аргумента и нулю — при отрицательных.

При $n \sim 20 \div 25$ и $m \sim 5 \div 6$ эффективность описанного алгоритма достаточно высока [17], при бóльших значениях следует ограничиться локально-оптимальным решением. Отметим также, что для задачи *нпб*-триангуляции разработано также большое количество приближенных эвристических алгоритмов ([25, 99, 105, 149] и др.).

К сожалению, описываемый алгоритм непригоден для отыскания максимально согласованных упорядоченных разбиений, сохраняющих групповое доминирование. В [11] предлагается для этих целей несколько иной алгоритм, также использующий идеи скорейшего спуска, но по-иному организующий дерево вариантов. Страты при этом формируются последовательно, «сверху вниз», что позволяет эффективно отсекать упорядоченные разбиения, не сохраняющие группового доминирования. Алгоритм, предложенный в [11], более нагляден, чем описанный, но работает, в среднем, значительно медленнее и поэтому менее пригоден для групповых моделей МС; однако он дает возможность построить решения, оптимальные с точки зрения моделей ГД (если такие решения для данного m и данной матрицы A существуют).

4.3. Другие модели группового упорядочения

Лучшим каждому кажется то,
к чему он имеет охоту.

Козьма Прутков
(«Плоды раздумья»)

Помимо групповых моделей максимального согласования, представляющихся авторам наиболее логичными (хотя и не всегда применимыми), для решения задачи о групповом упорядочении могут привлекаться и иные модели, так или иначе реализующие преобразование $G \to S$. Расслоение объектов при этом может иметь следующий содержательный смысл:

— последовательное выделение наилучших объектов (например, по Парето) [52, 62, 105, 139];

— дифференциация объектов по значениям свертки оценок по различным критериям [46, 128];

— последовательное разбиение множества объектов на упорядоченные между собой классы на основе информации от ЛПР (многовариантные процедуры, схемы последовательного выбора, задачи расшифровки и поиска максимального верхнего нуля монотонной функции конечнозначной логики и др.) [38, 55, 75, 120, 126, 143].

Для задачи о групповом упорядочении объектов могут быть использованы все типы формальных постановок, указанные в гл. 2. Особое распространение на практике получили разнообразные модели спортивного типа, в которых нахождение оптимальных упорядоченных разбиений обычно достаточно просто. В наиболее простом случае к первому слою относится фиксированное число объектов с наибольшими строчными суммами, ко второму слою — объекты с меньшими суммами и т. п. (тем самым задача ставится при ограничениях на мощность и число страт). Если ограничения на мощность нежелательны, то могут вместо этого быть установлены пороги $\alpha_1 = \max_i s_i + \varepsilon$; α_2; . . .; $\alpha_{m+1} = \min_i s_i$, и в страту φ_k попадают объекты, для которых $s_i \in [\alpha_{k+1}, \alpha_k)$ (при этом, однако, не гарантируется непустота всех страт). Может использоваться и комбинация обоих способов.

Чтобы избежать необходимости проводить все парные сравнения, на практике нередко применяется также следующая схема, реализующая цепочку $G \to NC \to S$. Все множество объектов разбивают на некоторое количество подмножеств, внутри каждого из которых строится линейное упорядочение (в данном случае — при помощи одной из моделей спортивного типа, обычно просто турнирной). Лучшие объекты (один или несколько) от каждого подмножества попадают в страту φ_1 («главный финал»), следующие — в φ_2 и т. д. Аналогичным образом могут быть реализованы и упомянутые выше цепочки $G \to T \to S$, $G \to NT \to S$ и др. Применение спортивных моделей здесь также обусловлено необходимостью в быстром и простом получении результатов.

Подробно рассмотренные в гл. 3 модели линейного упорядочения, как правило, допускают обобщение для задачи о групповом упорядочении. Во всех моделях первой группы, связанных с упорядочением объектов по убыванию значения ранжирующего фактора (таких как БТ, ИСП, БББ, СУ, РС) такое обобщение может быть без труда достигнуто так же, как и для спортивных моделей (т. е. за счет введения порогов α_i или фиксации мощности страт и расщепления линейного упорядочения). Возможно и использование этих моделей в рамках цепочек $G \to NC \to S$ и т. п., однако практические примеры такого рода авторам неизвестны.

Для моделей второй группы, в которых ищутся структуры, доставляющие максимум определенным функционалам качества аппроксимации, такой подход, хотя и также возможен, выглядит излишне механистическим, поскольку задача поиска оптимальной структуры может быть формализована непосредственно. Для групповых моделей максимального согласования это уже было сделано в 4.2, здесь же мы вкратце остановимся на обобщении остальных линейных моделей второй группы.

В модели ЛДС элементарное несогласие считалось тем более тяжелым, чем дальше друг от друга в упорядочении отстоят соответствующие объекты, что приводит к соотношению (3.43). Обобщая аналогичным образом задачу (4.18), придем к групповой модели ЛДС, определяемой задачей

$$H'_D(\Phi) \triangleq \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{s=r+1}^{m} \sum_{i \in \varphi_r} \sum_{j \in \varphi_s} d_{ij}(s-r) \to \max_{\Phi \in \Phi_m^*}. \quad (4.30)$$

Аналогичным образом в линейной модели БС особенно важным считалось совпадение ближних связей в аппроксиманте и исходной структуре, что привело к (3.44). Обобщая аналогичным образом задачу (4.17), можно получить групповую модель БС, в которой множество $\Phi^*_{\mathrm{opt}}(A)$ представляет собой множество оптимальных решений задачи вида

$$H''_B(\Phi) \overset{\Delta}{=} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{i \in \varphi_r} \sum_{j \in \varphi_{r+1}} b_{ij} \to \max_{\Phi \in \Phi^*_m} . \tag{4.31}$$

Задачи вида (4.30)—(4.31) как обоснование групповых моделей ЛДС и БС были предложены в [13, 15]. Максимизируемая часть соответствующим образом преобразованных матриц иллюстрируется рис. 4.4—4.5.

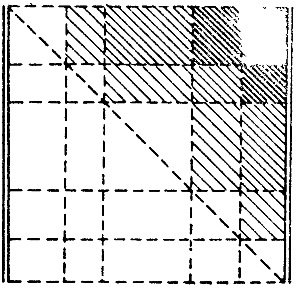


Рис. 4.4

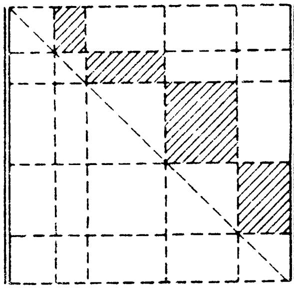


Рис. 4.5

Пути построения минимаксных групповых моделей были намечены в [15]. Задача (3.46), определявшая линейную минимаксную модель, при этом может быть обобщена и переписана в виде

$$\max_{s=\overline{1, m-1}} \max_{t > s} p_{ts} \to \min_{\Phi \in \Phi^*_m} , \tag{4.32}$$

где групповая степень превосходства вычисляется по формуле

$$\forall k,\ l = \overline{1,\ m} \quad p_{kl} = \max_{i \in \varphi_k} \max_{j \in \varphi_l} a_{ij} \tag{4.33}$$

или формулам вида (4.8)—(4.10), (4.23).

Не встречает принципиальных трудностей и формализация минимаксных групповых моделей неравномерной аппроксимации: так, групповая минимаксная модель ЛДС опирается на задачу

$$\max_{s=\overline{1, m-1}} \max_{t > s} p_{ts}(t - s) \to \min_{\Phi \in \Phi^*_m} , \tag{4.34}$$

являющуюся прямым обобщением (3.46′), а групповая минимаксная модель БС — на задачу вида

$$\max_{s=\overline{1, m-1}} p_{s+1,\, s} \to \min_{\Phi \in \Phi^*_m} , \tag{4.35}$$

обобщающую (3.46″). Однако блочные задачи (4.32) и (4.34)—(4.35) практически не исследованы и алгоритмы их решения авторам неизвестны.

Линейная модель БРК также без труда обобщается для группового случая, лишь только минимум в (3.49) ищется на множестве расплывчатых квазисерий с фиксированным числом классов (страт); но для некоторых m это множество может оказаться пустым. Вопрос о том, насколько алгоритм, предложенный в [40] для решения (3.49), может быть обобщен для решения таким образом модифицированной задачи, остается открытым.

На наш взгляд, упомянутые и кратко охарактеризованные в настоящей главе модели покрывают имеющиеся практические потребности в «разумных» подходах к построению групповых упорядочений объектов, в достаточной степени различаясь по положенным в их основу принципам, степени обоснованности и сложности построения искомых упорядоченных разбиений. Вместе с тем нельзя не упомянуть о том, что на практике, помимо их, нередко используются разнообразные эвристические схемы, не имеющие достаточного методологического обоснования. Это связано, в первую очередь, с тем богатым арсеналом эвристических и полуэвристических методов, который разработан для решения родственной задачи о классификации объектов по матрице связей типа «объект-объект». Большинство таких методов после некоторой модификации (которая, к тому же, может быть произведена далеко не единственным способом) оказываются до определенной степени пригодны для обработки структур предпочтений (т. е. орграфов типа G или G') и соответствующих матриц парных сравнений с целью построения группового упорядочения объектов. Сюда могут быть отнесены различные видоизменения таких известных методов кластерного анализа и таксономии, как методы «ближайшего соседа», «взвешенных групп», «локальных расстояний» [3, 25, 54, 67, 105], алгоритмов типа «размещение» и «объединение» [105], методов многомерного шкалирования [64, 67] и др.

В то же время подобные эвристики отличаются тем, что обычно при их использовании множество $\Phi^*_{\text{opt}}(A)$ никак не выделяется и не определяется; вместо этого предлагается совершать определенную последовательность действий (нередко заданную неоднозначным образом) до тех пор, пока это возможно или пока выполняются некоторые условия. Полученное в результате этого упорядоченное разбиение объявляется в итоге «достаточно хорошим», а вопрос о том, чем же оно лучше прочих, обычно даже не возникает. Таким образом, здесь мы сталкиваемся, строго говоря, не с моделями группового упорядочения, а всего лишь с более или менее обоснованными эвристическими схемами, применяемыми для решения этой задачи фактически без исследования самого вопроса о допустимости их и адекватности.

Коснемся в заключение настоящей главы и вопроса о некоторых частных видах слоистых структур, введенных в гл. 1, и о соответствующих проблемах аппроксимации исходной структуры предпочтений. Задача о построении наилучшей структуры типа S' (соответствующая проблеме выделения упорядоченного подмножества лучших объектов) вполне может быть поставлена так же, как и общая задача о построении слоистой структуры (с дополнительными жесткими ограничениями на число объектов в верхних стратах) и решаться соответственно. В то же время для такой задачи принятия решений интерес представляет и вопрос о мощности подмножества лучших объектов, и может оказаться желательным добиться ее предельного увеличения с тем, чтобы расслоение исходного множества было возможно более подробным. Укажем в этой связи на интересную модель, прямо предусматривающую построение слоистой структуры типа S' с максимально возможным числом одноэлементных страт.

Для рассматриваемой структуры предпочтений G и соответствующей матрицы A вновь введем взвешенную матрицу смежности B (4.15). *Триангуляцией с обрамлением* матрицы B назовем такую одновременную перестановку ее строк и столбцов, в результате которой в левом верхнем углу ее возникает квадратная подматрица верхне-треугольного вида (рис. 4.6). Такой матрице естественным образом ставится в соответствие структура S', состоящая из k одноэлементных верхних страт $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ и нижней страты φ_{k+1} из $n-k$ элементов (где k — порядок полученной подматрицы).

Вводя дополнительные условия, обеспечивающие превосходство верхних страт над нижней (например, потребовав $p_{i,\,k+1} \geqslant p_{k+1,\,i}$, $i=\overline{1,\,k}$, где групповое превосходство определяется, например, согласно (4.9), или наложив более слабое условие $p_{0,\,k+1} \geqslant p_{k+1,\,0}$, где $\varphi_0 = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i$), можно считать число k оценкой качества триангуляции и поставить задачу вида $k \to \max$. Некоторые подходы к ее решению предложены в [167].

Весьма частой задачей преобразования является переход от исходной структуры G к двухслойной структуре K за счет выделения некоторого подмножества вершин (объектов). Помимо ее самостоятельной ценности, такая проблема представляет особый интерес, ибо лежит в основе многих подходов к решению ЗПР, предусматривающих проведение многошаговых процедур типа последовательной дихотомии в целях постепенного сужения исходного множества альтернатив. В ряде работ исследуется и вопрос о мощности множества наилучших элементов [34, 52, 128].

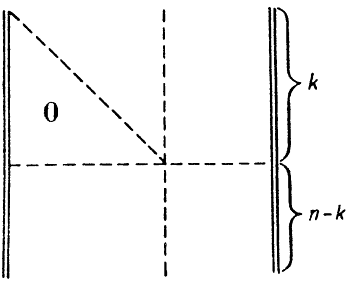


Рис. 4.6

Задача построения двухслойной структуры типа K является, очевидно, частным случаем общей проблемы группового упорядочения при $m=2$, так что для ее анализа и решения пригодны описанные в настоящей главе модели и методы; однако в связи с ее особой важностью мы рассмотрим ее значительно подробнее в следующей главе.

В прикладных системах группового упорядочения целесообразно реализовывать технологию решения таких задач, включающую (рис. 4.7) [85, 86, 92]:

— алгоритмы и человеко-машинные процедуры реализации этапов преобразования данных (прямоугольные блоки на рис. 4.7);

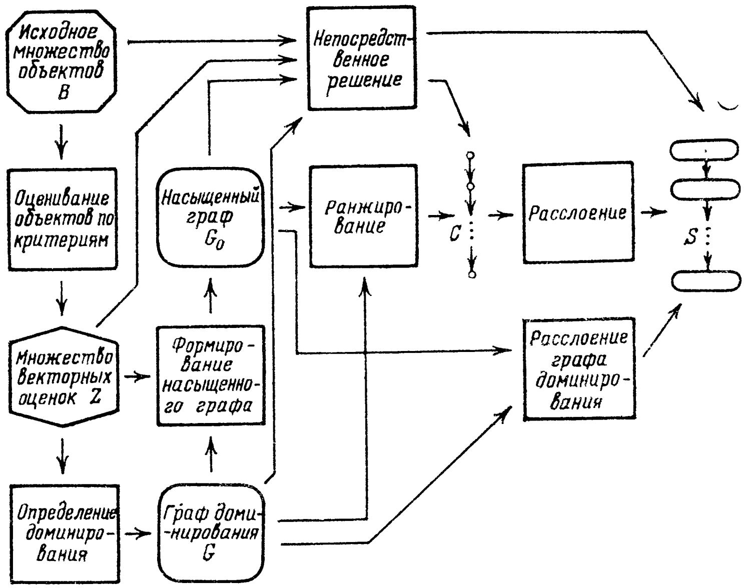


Рис. 4.7. Стратегии решения

— стратегии (последовательно-параллельные схемы преобразования данных от исходных до результирующих);

— сценарии (решения на основе различных стратегий, их анализ, использование результатов при последующих решениях).

Глава 5

МОДЕЛИ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОДМНОЖЕСТВА ОБЪЕКТОВ И ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ

Брат Аба отобрал для вашего ареста не самых умелых бойцов, а самых толстых и сильных.

А. Стругацкий, Б. Стругацкий («Трудно быть богом»)

В рамках решения различных ЗПР задача о выделении неупорядоченного подмножества «лучших» объектов (и соответствующая задача построения аппроксимирующего двудольного орграфа в рамках преобразования типа $G \to K$) часто имеет ключевое значение как основной повторяемый локальный фрагмент, отвечающий содержательной постановке. Формализация подобного преобразования приводит к различным разновидностям хорошо известной в комбинаторной оптимизации задачи о рюкзаке, заключающейся в выборе из исходного множества объектов $V = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ некоторой части (рюкзака) так, чтобы на выделенном подмножестве достигался экстремум целевой функции и выполнялись определенные ограничения.

Комбинаторные задачи рюкзачного типа имеют широкое приложение в самых различных областях [16, 49, 85, 95, 115], например, при планировании практически на всех уровнях. В качестве объектов здесь рассматриваются темы (задания, комплексные программы, заказы и т. п.), характеризующиеся эффективностью (полезностью) и требуемыми для выполнения ресурсами (трудовыми, материальными, информационными и др.), а решение задачи в этом случае заключается в отборе подмножества тем, заданий, на котором общая эффективность наибольшая и выполняются ограничения на используемые ресурсы. При организации данных в иерархической памяти вычислительных систем объектами являются блоки данных, и надлежит отобрать блоки, частота использования которых наибольшая, для размещения в быстродействующей памяти при выполнении ограничений на общий объем требуемой памяти (задачи подобного типа иногда называются также задачами загрузки). Аналогичные комбинаторные модели возникают в различных задачах принятия управленческих, плановых, проектных решений. Рассмотрим их основные типы и особенности.

5.1. Основные виды и особенности моделей рюкзачного типа

> Фауна силиконоидального типа, главные представители: мерзавли, дендроги думанные, асманиты, курдли и осьмиолы визговатые.
>
> *С. Лем («Звездные дневники Ийона Тихого»)*

На содержательном уровне можно выделить ряд параметров классификации задач рюкзачного типа [16, 41, 43, 44, 49, 83, 85]:

1) тип критерия (максимизация — минимизация, фиксированные доплаты, многокритериальный случай);

2) число видов ресурсов (1, 2, $\geqslant 3$);

3) тип задачи (обычная, треугольная, лестничная, блочная);

4) дополнительные ограничения (наличие логических, иерархических отношений на исходных объектах, например: технологических; предпочтений ЛПР);

5) число рюкзаков (1, 2, $\geqslant 3$);

6) тип измерения параметров (в количественных, порядковых шкалах).

Следует отметить, что некоторые варианты задач рюкзачного типа совпадают с другими комбинаторными моделями. Это относится, например, к моделям упаковки, в частности упаковки в контейнеры, к задачам теории расписаний (планирование вычислительного процесса в многопроцессорных системах) [32, 49, 85, 121, 139].

При решении задач рюкзачного типа используются различные подходы, методы [43—45, 48, 49, 85, 127]:

— методы целочисленного программирования (метод ветвей и границ, другие переборные схемы);

— сетевые методы;

— эвристические подходы (релаксационные, метод множителей Лагранжа, «пожирающие» алгоритмы, дихотомические алгоритмы);

— комбинированные алгоритмы;

— человеко-машинные процедуры.

Задачи о рюкзаке (за исключением простейших частных случаев с единичными коэффициентами в целевой функции) относятся к классу NP-трудных проблем [49]. Широко распространена гипотеза о том, что задачи этого класса неразрешимы за полиномиальное время [49, 95, 124]. Целесообразным является применение для задач, принадлежащих к классу NP-трудных, эффективных приближенных алгоритмов. Комбинаторные задачи рюкзачного типа представляют интерес не только с практической, но и с теоретической точки зрения. Некоторые варианты таких задач могут быть решены эффективными алгоритмами, гарантирующими погрешность получаемых решений (по целевой функции, по точности выполнения ограничений). В то же время для многих NP-трудных задач поиск приближенного решения с гарантированной погрешностью является такой же сложной проблемой, как и поиск точного решения [44, 95].

Определение 5.1 [43, 95]. Алгоритм называется эффективным, если его трудоемкость и требуемая память полиномиально зависят от размерности задачи. (Под размерностью задачи понимается длина двоичной записи всех исходных данных.)

Определение 5.2 [43, 95]. Алгоритм называется ε-приближенным (или соответственно, ε_a-приближенным) $\varepsilon \in [0, 1]$ ($\varepsilon_a \geqslant 0$) для массовой задачи Z, если для любой индивидуальной задачи I_Z он вырабатывает решение $\boldsymbol{x}$ такое, что $|f(I_Z, \boldsymbol{x}) - f^*(I_Z)| \leqslant \varepsilon f^*(I_Z)$ (или, соответственно, $|f(I_Z, \boldsymbol{x}) - f^*(I_Z)| \leqslant \varepsilon_a$), где $f(I_Z, \boldsymbol{x})$ — значение целевой функции на решении, вырабатываемом алгоритмом, $f^*(I_Z)$ — оптимальное значение целевой функции.

Определение 5.3 [95]. Полиномиальный приближенный алгоритм называется быстрым, если его трудоемкость и память оцениваются сверху полиномом относительно размерности задачи и величины $1/\varepsilon$ ($1/\varepsilon_a$).

Оценка погрешности решения по целевой функции может проводиться и другим способом, отличным от приведенного в Определении 5.2 [107]. Кроме того, содержащаяся в Определении 5.2 плата (точность целевой функции) может оказаться недостаточной для получения алгоритма, имеющего полиномиальную сложность по размерности задачи и $1/\varepsilon$ ($1/\varepsilon_a$).

Пусть имеется условие максимизации некоторой функции, когда одно из ограничений имеет вид $\varphi(\boldsymbol{x}) \leqslant d$, где $\varphi(\boldsymbol{x})$ — функция от $\boldsymbol{x}$, а d — константа.

Определение 5.4 [81]. Алгоритм называется (ε, δ)-приближенным ($\delta \in [0, 1]$) для массовой экстремальной задачи Z, если для любой индивидуальной задачи I_Z он вырабатывает решение такое, что $\alpha(I_Z, \boldsymbol{x}) \leqslant \varepsilon$ и $\beta(I_Z, \boldsymbol{x}) \leqslant \delta$, где

$$\alpha(I_Z, \boldsymbol{x}) = \max\left\{0, \frac{f^*(I_Z) - f(I_Z, \boldsymbol{x})}{f^*(I_Z)}\right\},$$
$$\beta(I_Z, \boldsymbol{x}) = \max\left\{0, \frac{d(I_Z) - \varphi(I_Z, \boldsymbol{x})}{d(I_Z)}\right\},$$
$$f^*(I_Z) \neq 0, \quad d(I_Z) \neq 0,$$

$d(I_Z)$ — правая часть условия в задаче I_Z, $\varphi(I_Z, \boldsymbol{x})$ — левая часть условия при решении, вырабатываемом алгоритмом.

Из определения 5.4 следует, что получаемое решение является ε-приближенным относительно решения при правой части условия равной $(1+\delta)d$. Но в подавляющем большинстве случаев найденное решение является ε-приближенным и относительно оптимального при правой части условия, равной d.

Можно модифицировать определение 5.4 для других случаев, например: целевая функция минимизируется, ограничение имеет обратный знак, точность решения задачи задается другим способом. Аналогично можно допускать нарушение нескольких ограничений (например, в случае многомерного рюкзака).

Приближенные алгоритмы, соответствующие определениям 5.2 и 5.4, основаны на применении методов динамического программирования, ветвей и границ [41, 43, 44, 81, 124, 134]. При небольшой размерности задачи возможно непосредственное применение указанных переборных методов. В случае значительной размерности задач целесообразно применение эвристических алгоритмов (например, «пожирающих» алгоритмов, отказ от условия целочисленности) [162]. При этом, как правило, получаются решения, незначительно отличающиеся от оптимальных.

В некоторых случаях задача о рюкзаке сводится к задаче расшифровки и поиска максимального верхнего нуля монотонной функции конечнозначной логики, для которой построен интерактивный алгоритм (в шенноновской постановке — с минимизацией оракульной трудоемкости, т. е. числа обращений к специалисту) [125].

Практические комбинаторные задачи рюкзачного типа являются, в основном, достаточно сложными и подход к их решению должен основываться на декомпозиции, методе частных целей [48]. При этом выделяются фрагменты общей постановки, более простые подзадачи, к которым могут быть обоснованно применены эффективные алгоритмы.

5.2. Простейшие модели

...Как государство богатеет,
И чем живет, и почему
Не нужно золота ему,
Когда *простой продукт* имеет...

А. С. Пушкин («Евгений Онегин»)

Простейшие модели рюкзачного типа широко известны, достаточно хорошо исследованы. Они имеют различные приложения, их целесообразно использовать в качестве базовых фрагментов, подзадач при анализе, решении сложных задач рюкзачного типа. Простейший вариант задачи о рюкзаке имеет вид [43, 44, 49, 95, 124, 134]

максимизировать $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad c_i \geqslant 0, \quad a_i \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (5.1)$$

На практике возникают постановки, в которых ресурсные ограничения имеют более сложный вид. Например, треугольная задача [96]:

максимизировать $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{j} a_i x_i \leqslant b_j, \quad j=\overline{1, n},$$

$$x_i = 0 \vee 1, \quad c_i \geqslant 0, \quad a_i \geqslant 0, \quad b_j \geqslant 0 \quad \forall j, \quad i=\overline{1, n}. \tag{5.2}$$

При решении экономических задач, связанных с капитальными вложениями, возникает модель с фиксированными доплатами [6]:

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{n} (c_i x_i + p_i \operatorname{sign} x_i)$$

$$\text{при условиях } \sum_{i=1}^{n} (a_i x_i + q_i \operatorname{sign} x_i) \leqslant b,$$

$$x_i \text{ — целые}, \quad x_i \geqslant 0, \quad c_i \geqslant 0, \quad a_i \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad p_i \geqslant 0, \quad q_i \geqslant 0, \quad i=\overline{1, n}. \tag{5.3}$$

Во многих практических ситуациях требуется не только отобрать объекты, но и выбрать для каждого отобранного объекта некоторый вариант реализации, характеризующийся индивидуальными эффективностью и ресурсными ограничениями. Это приводит к задаче лестничного рюкзака [43, 95, 96]:

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leqslant b; \quad \sum_{j=1}^{l_i} x_{ij} \leqslant 1, \quad i=\overline{1, n},$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad c_{ij} \geqslant 0, \quad a_{ij} \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad i=\overline{1, n}, \quad j=\overline{1, m} \tag{5.4}$$

или к задаче блочного рюкзака, в которой второе ограничение имеет вид [43, 95, 96]

$$\sum_{j=1}^{l_i} x_{ij} = 1, \quad i=\overline{1, n}. \tag{5.5}$$

В блочной задаче для каждого объекта i проводится выбор одного из возможных вариантов реализации, а в лестничной — одним из вариантов является ситуация, когда объект не отбирается.

Приведенные выше постановки задач несложным образом преобразуются к виду, когда критерий минимизируется [95]. При этом ресурсное ограничение изменяет знак. Такие модели возникают, например, при минимизации затрат.

Известным частным случаем задачи о рюкзаке является постановка, в которой требуется разбить V на две группы, у которых наиболее близки суммы параметров a_i (задача о камнях). Такая задача является NP-трудной, для нее используются алгоритмы, разработанные для (5.1).

При анализе надежности систем возникает задача максимизации надежности (нелинейная задача о рюкзаке [95]):

$$\text{максимизировать } f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i^{x_i})$$

$$\text{при условиях } \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leqslant b_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad x_i \text{ — целые.} \tag{5.6}$$

Рассмотрим ε-приближенный полиномиальный (быстрый) алгоритм для задачи (5.1), гарантирующий ограниченную относительную ошибку (определение 5.2). Пусть имеется некоторое решение $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ и $c(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, $a(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Для получения решения $\boldsymbol{x}^0$ модели (5.1), на котором гарантируется ограниченная величиной $\varepsilon \in [0, 1]$ относительная погрешность $c(\boldsymbol{x}^*) - c(\boldsymbol{x}^0) \leqslant \varepsilon c(\boldsymbol{x}^*)$, где $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальное решение, используем модификацию «алгоритма разбиения на интервалы» [42, 95].

Алгоритм поиска $\boldsymbol{x}^0$ состоит из n шагов, на каждом из которых формируется некоторое множество допустимых решений D^k ($k = \overline{1, n}$).

На 1-м шаге $D^1 = \{(0, 0, \ldots, 0), (1, 0, \ldots, 0)\}$. Пусть на $(k-1)$-м шаге получено множество D^{k-1}. Решения, входящие в D^{k-1}, имеют вид $\boldsymbol{x}^{k-1} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, 0, \ldots, 0)$. Следующий k-й шаг состоит из шести операций с множеством D^{k-1}: 1) «К-сдвиг»: из каждого вектора $\boldsymbol{x}^{k-1} \in D^{k-1}$ формируется вектор $\boldsymbol{x}^k = (x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$; 2) «упорядочение»: все векторы типа $\boldsymbol{x}^{k-1}$ и $\boldsymbol{x}^k$ располагаются в порядке неубывания величины $c(\boldsymbol{x})$; 3) «вычисление ресурса»: для каждого вектора полученного множества вычисляется значение оставшегося ресурса $\rho(\boldsymbol{x}) = b - a(\boldsymbol{x})$; 4) «первое выбрасывание»: выбрасываются векторы $\boldsymbol{x}$, для которых $\rho(\boldsymbol{x}) < 0$; 5) «второе выбрасывание»: из полученного упорядоченного множества выбрасываются доминируемые векторы (вектор $\boldsymbol{y}$ доминируется вектором $\boldsymbol{x}$, если $c(\boldsymbol{x}) \geqslant c(\boldsymbol{y})$ и $\rho(\boldsymbol{x}) \geqslant \rho(\boldsymbol{y})$); 6) «разбиение на группы»: пусть $\overline{D^k}$ — полученное упорядоченное множество векторов, $p = \max_{x \in \overline{D^k}} c(\boldsymbol{x})$, разобьем интервал $[0, p]$ на $[n/\varepsilon]$ подынтервалов так, чтобы длина каждого из них не превосходила $[\varepsilon p/m]$; если в $\overline{D^k}$ имеется несколько векторов $\boldsymbol{x}$, у которых $c(\boldsymbol{x})$ попадает в один и тот же подынтервал, то из $\overline{D^k}$ выбрасывается часть этих векторов с тем, чтобы в каждом подынтервале остался только один вектор $\boldsymbol{x}$ с наибольшим (в этом подынтервале) значением $\rho(\boldsymbol{x})$.

В результате остается искомое множество D^k. Выбрасывание векторов может привести к абсолютной погрешности, не превышающей $\varepsilon c(\boldsymbol{x}^*)/n$. За n шагов алгоритма может накопиться относительная погрешность, не превышающая ε.

Искомым вектором $\boldsymbol{x}^0$ является элемент D^n с наибольшей величиной $c(\boldsymbol{x})$.

Данный алгоритм несущественно отличается от схемы, изложенной в [42]. Оценки трудоемкости и памяти алгоритма — $O(n^2/\varepsilon)$. В алгоритме использована схема динамического программирования и на каждом шаге из дальнейшего рассмотрения исключаются не представляющие интерес частичные решения (метод решета). Такой подход распространен на различные варианты задачи о рюкзаке (например, на минимум целевой функции, с фиксированными доплатами, блочную), при этом оценки трудоемкости и памяти улучшены [44].

5.3. Одна модель с ограничениями специального вида

> Это нам показывает, как мы должны производить выбор. Наиболее интересными являются те факты, которые могут служить свою службу многократно, которые могут повторяться.
>
> *А. Пуанкаре («Наука и метод»)*

В практических ситуациях возникают постановки рюкзачного типа, отличающиеся от известных простейших моделей. Рассмотрим задачу с иерархическими ограничениями, возникающую при оптимизации оверлейной структуры программных комплексов (компоновки программных модулей), проектировании иерархической структуры организаций, разработке организационно-технических мероприятий, агрегации компонентов сложных технических комплексов. Приведем постановку задачи и подходы к решению в терминах компоновки программных модулей [81, 85].

При функционировании программных комплексов (операционных систем, пакетов прикладных программ) имеют место ситуации, когда одни программные модули, находящиеся в оперативной памяти (ОП), вызывают для выполнения из внешней памяти (ВП) другие. За счет объединения программных модулей возможно снижение среднего числа вызовов из ВП. В качестве моделей программных комплексов обычно рассматриваются ациклические направленные графы, вершины которых взаимно однозначно соответствуют программным модулям, а дуги указывают связи между вызывающими и вызываемыми модулями [70, 97]. При этом часто предполагается, и это соответствует многим реальным системам, что передача по управлению осуществляется с возвратом в вызывающий модуль [70, 97]. Задача компоновки сводится к выбору стягиваемых дуг во взвешенном орграфе. Далее предполагается, что граф представляет собой дерево. Объединение (склеивание) программных модулей a и b (a вызывает b) позволяет заменить вызов модуля b модулем a из ОП на переход к модулю b внутри ОП. Это снижает среднее число вызовов из ВП; но может увеличить требуемый объем ОП.

Компоновка направлена на максимально возможное уменьшение среднего числа обменов между ВП и ОП (по сравнению со случаем, когда компоновка не проводилась) при ограничении на используемый объем ОП. Рассматриваемая постановка представляет собой один из возможных вариантов оптимизации оверлейной структуры программного комплекса. На рис. 5.1 представлен пример компоновки модулей оверлейной структуры. Даже в простейшем случае, когда система состоит только из основного сегмента и вызываемых подпрограмм, задача компоновки не проще задачи о рюкзаке, которая является NP-трудной.

Формально задача компоновки ставится следующим образом. Пусть задано направленное дерево $G=(V, \Gamma)$, где V — множество

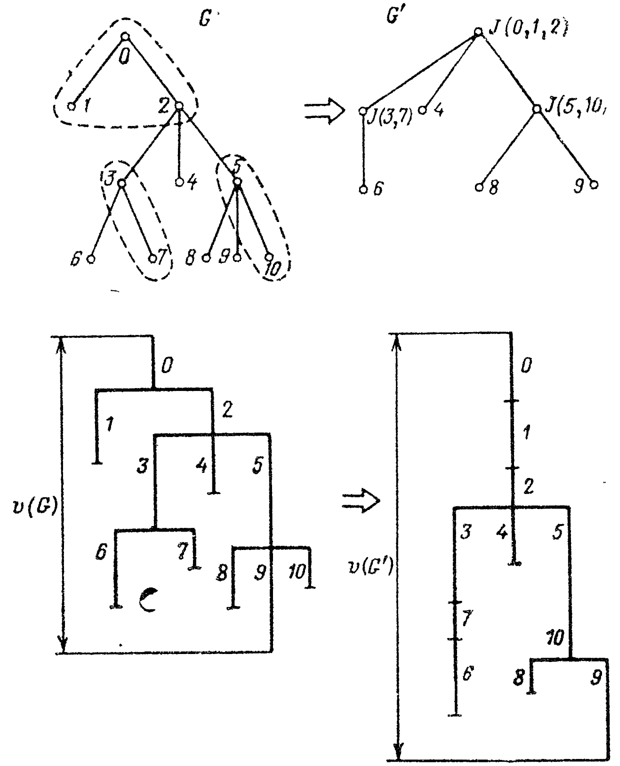


Рис. 5.1. Пример компоновки модулей оверлейной структуры

вершин (программных модулей), Γ — многозначное отображение V в V. Ориентация дуг в G — от корня $a_0 \in V$ к висячим вершинам. Каждая вершина $a \in V$ имеет вес (требуемый объем ОП) $v(a) \geqslant 0$, каждая дуга (a, b) $(a, b \in V$ и $b \in \Gamma a)$ имеет вес (частота вызова модуля b модулем a) $w(a, b)$. Для каждого пути $L(a_1, a_l) = \langle a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_l \rangle$ $(a_j \in \Gamma a_{j-1}, j=\overline{1, l-1})$ можно рассмотреть вес $v(L(a_1, a_l)) = \sum_{i=1}^{l} v(a_i)$. Назовем весом графа G величину $v(G) = \max_{b \in V^0} v(L(a_0, b))$, где $V^0 = \{a \in V \mid \Gamma a = \varnothing\}$ — множество висячих вершин.

Пусть $G_a = (V_a, \Gamma)$ — поддерево с корнем $a \in V$ (в V_a, кроме a, входят все вершины из V, достижимые из a). Назовем «хвостом» вершины a граф $(\{B_a \setminus a\}, \Gamma)$, а весом «хвоста» вершины a — величину $\hat{v}(a) = v(G_a) - v(a)$.

Очевидно, что

$$\hat{v}(a) = \max_{b \in \Gamma a} v(G_b).$$

Введем для каждой дуги к $a \in V \setminus a_0$ вес $w(a)$ и переменную $x(a)$, равную 1, если дуга стягивается, и 0 в противном случае. Преобразование графа при стягивании дуги из a в $b (b \in \Gamma a)$ определим следующим образом: вершина a заменяется на $J(a, b)$ с весом $v(J(a, b)) = v(a) + v(b)$ и $\Gamma J(a, b) = (\Gamma a \cup \Gamma b) \setminus b$, а вершина b с идущими из нее дугами исключается. По сути, это операция замыкания или отождествления пары вершин графа. Введем булев вектор $\boldsymbol{x}$, компонентами ~~которого~~ являются переменные $x(a)$ $\forall a \in V \setminus a_0$. С учетом стягивания дуг $\forall a \in V$ вес вершины и вес «хвоста» можно рассматривать как функции вектора $\boldsymbol{x} : v(a, \boldsymbol{x})$, $\hat{v}(a, \boldsymbol{x})$.

Рассмотрим задачу:

$$\text{максимизировать } W(\boldsymbol{x}) = \sum_{a \in V \setminus a_0} x(a) w(a)$$

при условиях $v(a_0, \boldsymbol{x}) + \hat{v}(a_0, \boldsymbol{x}) \leqslant B$, где B — некоторая положительная константа (объем доступной ОП).

Наряду с такой задачей (постановка типа 1) можно рассмотреть постановку типа 2 с ограничениями вида

$$v(a_0, \boldsymbol{x}) \leqslant B^-, \quad \hat{v}(a_0, \boldsymbol{x}) \leqslant B^+, \quad B^- + B^+ = B.$$

В задаче компоновки представляется целесообразным выделять различные частные случаи (метод частных целей), которые могут иметь как самостоятельный интерес, так и лежать в основе алгоритма решения задачи в общем случае. Частные случаи задачи компоновки иллюстрируются на рис. 5.2. В левом столбце представлены простейшие постановки (рис. 5.2*а*—5.2*д*), в правом — вспомогательные (рис. 5.2*е*—5.2*к*). Рассмотрим формальные постановки некоторых частных случаев. Пусть $\Gamma a_0 = \{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m\}$, u_i — дуга (a_0, a_i), $w(u_i) = w_i$. Задача, соответствующая рис. 5.2*а*, имеет вид

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{m} x_i w_i$$

$$\text{при условиях } v(a_0) + \sum_{i=1}^{m} x_i v(a_i) \leqslant B, \quad x_i = 0 \vee 1.$$

Эта задача совпадает с задачей о рюкзаке. Целевая функция для простейших задач совпадает с приведенной. Практический интерес представляет задача в случае, когда имеется только головной сег-

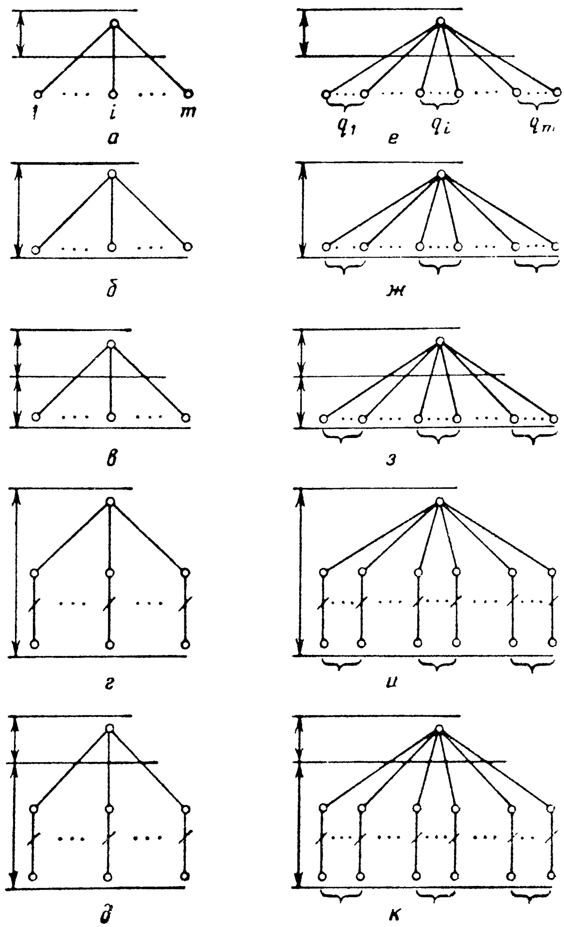


Рис. 5.2. Простейшие и вспомогательные варианты задачи компоновки

мент и вызываемые подпрограммы (рис. 5.2*б*), т. е. с условием

$$v(a_0)+\sum_{i=1}^{m} x_i v(a_i)+\max_{1\leqslant i\leqslant m}[(1-x_i)\,v(a_i)]\leqslant B.$$

В задаче, соответствующей рис. 5.2*в*, ограничения имеют следующий вид (постановка типа 2):

$$v(a_0)+\sum_{i=1}^{m} x_i v(a_i)\leqslant B^-,$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}[(1-x_i)\,v(a_i)]\leqslant B^+.$$

Задача, соответствующая рис. 5.2г, имеет следующую формальную постановку

$$v(a_0) + \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot v^-(a_i) + \max_{1 \leqslant i \leqslant m} [(1 - x_i) v^-(a_i) + v^+(a_i)] \leqslant B.$$

Эта задача соответствует случаю, когда $\forall a_i \in \Gamma a_0$ вес равен $v^-(a_i)$, каждая вершина a_i имеет одного последователя с весом $v^+(a_i)$ (это вес «хвоста» вершины $a_i - \hat{v}(a_i)$) и возможно стягивание дуг только вида (a_0, a_i). Другие постановки простейших частных случаев задачи компоновки формулируются аналогичным образом.

Вспомогательные задачи являются усложнением «лестничной» задачи о рюкзаке. Они заключаются не только в определении объединяемых модулей, но и в выборе варианта реализации модулей из набора вариантов. Введем множество булевых векторов

$$X = \{\boldsymbol{x}_{ij} = (x_{ij}^1;\ x_{ij}^2) \mid x_{ij}^1;\ x_{ij}^2 = 0 \vee 1,\ j = \overline{1, q_i},\quad i = \overline{1, m}\}.$$

В постановках всех вспомогательных задач должны учитываться следующие ограничения:

$$\sum_{j=1}^{q_i} x_{ij}^1 = 1 \quad \forall i, \quad x_{ij}^2 \leqslant x_{ij}^1 \quad \forall i,\ j.$$

Формальная постановка «лестничной» задачи о рюкзаке при рассматриваемой интерпретации имеет вид

$$\text{максимизировать } W(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} w(a_{ij}) x_{ij}$$

$$\text{при условиях } v(a_0) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} x_{ij} v(a_{ij}) \leqslant B.$$

Во вспомогательных задачах целевая функция несколько отличается:

$$W(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} (x_{ij}^1 \overline{w}(a_{ij}) + x_{ij}^2 w(a_{ij})).$$

Вспомогательные задачи имеют следующую интерпретацию. Пусть a_0 — головной сегмент с весом $v(a_0)$ и имеются вызываемые им модули с номерами $1, \ldots, i, \ldots, m$. Для каждого модуля i имеется множество вариантов реализации $\{a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{iq_i}\}$. Каждый вариант a_{ij} может представлять собой взвешенный граф, в котором осуществляется склеивание некоторых вершин. Варианту a_{ij} соответствует вес $v(a_{ij})$, среднее число вызовов модулем a_0 — $w(a_{ij})$ и число $\overline{w}(a_{ij})$, равное уменьшению среднего числа обращений к ВП при его работе. Требуется осуществить для каждого i выбор одного варианта реализации модуля ($x_{ij}^1 = 1$, если выбирается вариант a_{ij} и 0 — в противном случае) и присоединить его к a_0($x_{ij}^2 = 1$) или не присоединять ($x_{ij}^2 = 0$). Очевидно, что множество X определяет набор стягиваемых дуг $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$.

В качестве примера формальной постановки вспомогательной задачи можно рассмотреть задачу, соответствующую рис. 5.2*к* (постановка типа 2):

$$v(a_0)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q_i} x_{ij}^2 v^-(a_{ij}) \leqslant B^-,$$
$$\max_{i,j}\{x_{ij}^1[(1-x_{ij}^2)v^-(a_{ij})+v^+(a_{ij})]\} \leqslant B^+.$$

Эта задача соответствует случаю, когда a_0 — головной сегмент, каждый вызываемый модуль имеет одного последователя и возможно только объединение a_0 с вызываемыми им модулями.

Алгоритмы решения простейших частных случаев задачи компоновки (рис. 5.2, слева) основываются на ε-приближенном полиномиальном (быстром) алгоритме для задачи о рюкзаке (метод интервалов), изложенном в предыдущем разделе. При этом предполагается упорядочение элементов множества Γa по невозрастанию величин $v(a_i)$ или $v^-(a_i)+v^+(a_i)$. Оценки этих алгоритмов аналогичны оценкам алгоритма разбиения на интервалы —$O(m^2/\varepsilon)$. Решение вспомогательных задач основано на ε-приближенном полиномиальном (быстром) алгоритме для «лестничной» задачи о рюкзаке с оценками трудоемкости и памяти, соответственно $O\left(\frac{m}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{m} q_i\right)$ и $O\left(\frac{m^2}{\varepsilon}\max_{1\leqslant i\leqslant m} q_i\right)$. Для решения задачи иллюстрируемой рис. 5.2*и*, используется (ε, δ)-приближенный полиномиальный (быстрый) алгоритм с оценками трудоемкости и памяти, соответственно: $O\left(\frac{m}{\varepsilon\delta}\sum_{i=1}^{m} q_i\right)$ и $O\left(\frac{m^2}{\varepsilon}\max_{1\leqslant i< m} q_i\right)$.

В случае, когда G представляет собой $(k+1)$-уровневое дерево, алгоритм основывается на последовательной постановке и решении для фрагментов G простейших и вспомогательных задач. В множестве V можно выделить подмножества $M_0=\{a\in V|\Gamma a=\varnothing\}$, $M_1=\{a\in V|\Gamma a\subseteq M_0\}$, $M_2=\{a\in V|\Gamma a\subseteq\{M_0\cup M_1\}\}$ и т. д. Введем $\forall a\in V$ следующие характеристики: $m(a)=|\Gamma a|$, $\eta(a)=|V_a\setminus\{b\in V_a|\Gamma b=\varnothing\}$, $r=\lfloor 1/\delta_0\rfloor$, $\delta_0=\delta/2\eta(a_0)$, $\varepsilon_0=\varepsilon/\eta(a_0)$, $B_l=B\delta_0 l$.

Упрощенно, (ε, δ)-приближенный полиномиальный (быстрый) алгоритм для решения задачи компоновки в случае древовидной связи модулей имеет следующий вид. На первом шаге $\forall a_i\in M_1$ формулируется и решается с точностью ε_0 задача, соответствующая рис. 5.2*в* при $B^-=B_{l_1}$, $B^+=B_{l_2}(l_1=\overline{0,\ r+2},\ l_2=\overline{0,\ r-2-l_1}\quad\forall l_1)$. В результате для каждой вершины a_i получается набор решений (типа вариантов реализации) при различных значениях ограничений B^- и B^+. Далее, на μ-м шаге $(\mu=\overline{2,\ k-1})$ на основе результатов предыдущего шага $\forall a\in M_\mu$ формулируется и решается с точностью ε_0 задача, соответствующая рис. 5.2*з* при

$$B^-=B_{l_1},\quad B^+=B_{l_2}\quad (l_1=\overline{0,\ r+2\eta(a_i)}),$$
$$l_2=\overline{0,\ r+2\eta(a_i)-l_1}\quad \forall l_1).$$

В результате для каждой вершины a_i получается набор решений (типа вариантов реализации) при различных значениях ограничений B^- и B^+. На последнем k-м шаге с точностью ε_0 и $2\delta_0$ решается задача типа представленной на рис. 5.2*и* при ограничении, равном $B(1+2\delta_0(\eta(a_0)+1))$. Работа алгоритма иллюстрируется рис. 5.3, где 1-му шагу соответствует рис. 5.3*а*, μ-му шагу соответствует рис. 5.3*б* ($\mu=\overline{2, k-1}$), k-му шагу — рис. 5.3*в*.

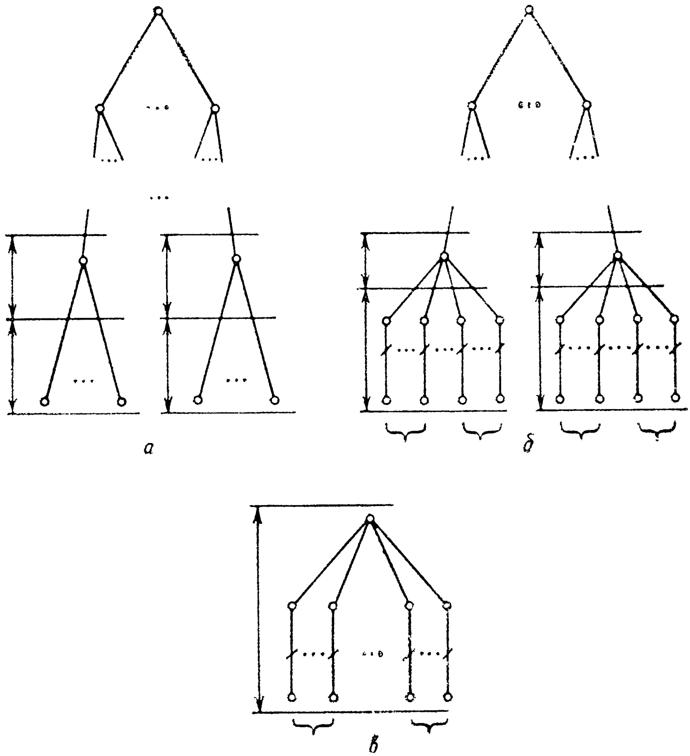


Рис. 5.3. Схема алгоритма для задачи компоновки в случае древовидной структуры графа

В результате получается решение $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ обеспечивающее ограниченную погрешность ε и δ. Оценка трудоемкости и памяти, соответственно, $O\left(\frac{n^2\eta^5(a_0)}{\varepsilon\delta^4}\right)$ и $O\left(\frac{m^2\eta^4}{\varepsilon\delta^4}\right)$, где $m=\max\limits_{a\in V} m(a)$. Широкое применение имеют трехуровневые системы (монитор, функциональные программы, подпрограммы). В этом случае алгоритм имеет оценку трудоемкости $O\left(\frac{n^2\eta^4(a_0)}{\varepsilon\delta^3}\right)$.

На основе предположения равенства характеристик модулей можно приближенно определять варианты компоновки, например, на ранних этапах проектирования. В случае двухуровневого дерева при равных весах вершин (объема модулей) задача компоновки решается точно с трудоемкостью $O(m \log m)$, где $m=|\Gamma a_0|$ на основе упорядочения элементов в порядке невозрастания весов входящих дуг.

Сложность некоторых вариантов рассматриваемой задачи приведена в [85].

Решение задачи компоновки основывается на применении метода частных целей (выделении ряда подзадач), декомпозиции исходного графа, аппроксимации исходных данных более простыми, «хорошими» (например, в предположении о равенстве характеристик модулей).

5.4. Модели с заданным квазипорядком

За бараньим боком последовали ватрушки ..., потом индюк ростом в теленка, набитый всяким добром: яйцами, рисом, печенками и невесть чем, что все ложилось комом в желудке.

Н. В. Гоголь («Мертвые души»)

Во многих практических задачах на исходный набор элементов накладываются графовые ограничения. Это возникает в ситуациях, когда объекты связаны между собой технологически, например, одни научные темы, строительные работы могут выполняться только совместно или после других [41, 115]. С другой стороны, графовые ограничения возникают в задачах принятия решений при наличии предпочтений ЛПР, многокритериальных оценок объектов в виде бинарного отношения доминирования [16, 83]. Такое графовое отношение может нарушаться, в то время как технологические ограничения не могут быть нарушены. Рассмотрим типовую задачу принятия решений.

Пусть имеется набор элементов (заказов) $V=\{1, \ldots, i, \ldots, n\}$, каждый из которых характеризуется требуемым для выполнения ресурсом. На множестве векторных оценок заказов по критериям качества, на основе предпочтений ЛПР может быть построено бинарное отношение предпочтения/безразличия, которое в общем случае является частичным квазипорядком [39]. Этот квазипорядок может быть представлен в виде орграфа $G=(V, U)$, где U — множество дуг, направленных от более предпочтительных к менее предпочтительным элементам. Пусть эффект от выполнения каждого заказа $i \in V$ характеризуется некоторым неотрицательным числом c_i; a_i — объем ресурса, требуемого для выполнения заказа i; b — ограничение на ресурс; x_i — булева переменная, равная 1, если заказ i включается в число отобранных, и 0 — в противном случае. Рассмотрим в таких условиях задачу о формировании портфеля заказов, постановка которой имеет вид

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

при условиях $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b,$

$$x_i \geqslant x_j, \quad \text{если} \quad i > j \quad \forall i, \ j \in V. \qquad (5.7)$$

Решение задачи (5.7) существенно зависит от вида графа G. При отсутствии связи между заказами по предпочтению (все несравнимые) задача свободна от графовых ограничений (G абсолютно несвязен) и является обычной задачей о рюкзаке.

Если граф предпочтений содержит контура или, более того, является сильно связным, задача (5.7) может и не иметь ни одного нетривиального допустимого решения (очевидно, что тривиальное решение — пустое подмножество отобранных заказов — всегда допустимо). В этом случае исходная структура G должна быть преобразована к одной из структур, для которых соответствующая задача (5.7) имеет решение.

Для линейного порядка C задача (5.7) решается точно очевидным алгоритмом с трудоемкостью $O(\log n)$ операций. Для структуры NC задача может быть решена ε-приближенным алгоритмом с трудоемкостью $O(nm/\varepsilon)$, где m — число цепочек. Для некоторых частных случаев слоистых структур (с дополнительными требованиями эквивалентности или несравнимости элементов в слоях) задача (5.7) может быть сведена с уменьшением размерности к случаю несвязного графа.

Для структур типа T и NT известен ε-приближенный алгоритм с трудоемкостью $O(n^2/\varepsilon)$ [41, 158]. В случае структур типа R представляется целесообразным предварительное преобразование к T и S. Общий случай S по сути аналогичен G, но с меньшей размерностью, т. е. S является очевидной промежуточной моделью. S' представляет собой некоторый «гибрид» линейного порядка S и слоистой структуры S. Ход решения в этом случае выглядит так: вначале отбираются, пока допускают ресурсные ограничения, заказы верхних одноэлементных слоев; если имеющийся ресурс не исчерпан, то задача ставится для остатка ресурса и оставшейся слоистой подструктуры.

Важный частный случай рассматриваемой задачи возникает при $c_i = 1$, $i = \overline{1, n}$. К подобной задаче исходная может быть сведена добавлением к исходному множеству критериев качества критерия эффективности заказов. Упрощение вида максимизируемой целевой функции (вместо суммарного эффекта максимизируется число отобранных заказов) приводит к тому, что такая задача оказывается более простой и в перечисленных выше случаях применения базового ε-приближенного алгоритма может быть заменено использованием очевидных точных методов.

Обобщением задачи (5.7) является допущение ресурсов нескольких видов. Содержательно в практических ситуациях возникают именно такие постановки. При двух видах ресурсов для задачи о максимизации числа отбираемых элементов на несвязном графе предпочтений известен субоптимальный алгоритм [50], который может быть обоснованно применен и для некоторых частных случаев слоистых структур. В некоторых случаях целесообразно рассматривать требуемые ресурсы в качестве дополнительных показателей качества, т. е. включать информацию о ресурсах в графовые ограничения. Стратегии формирования портфеля заказов иллюстрируются рис. 5.4.

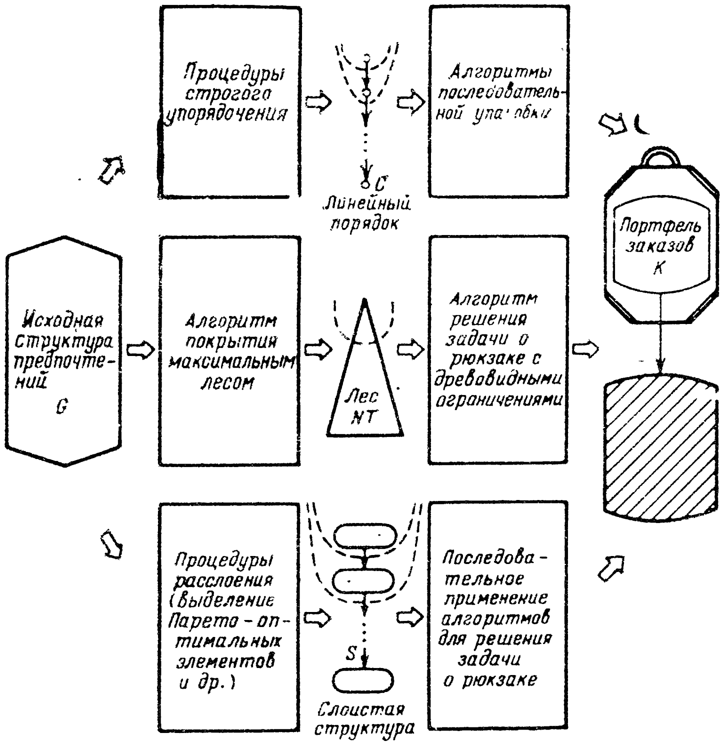


Рис. 5.4. Примеры стратегий формирования портфеля заказов

Модель типа (5.7) является достаточно сложной и подход к решению может основываться на некотором незначительном нарушении ограничений. Построение эффективных алгоритмов, допускающих ограниченную невязку ресурсных ограничений, приводится в предыдущем разделе. Можно рассматривать и некоторые нарушения графовых ограничений второго условия в постановке (5.7). В качестве погрешности (оценки степени нарушения графового ограничения) можно использовать число пар объектов (число дуг, число взвешенных дуг), нарушающих графовое условие.

Подобная погрешность естественным образом возникает в ситуациях, когда некоторые объекты не могут быть загружены в рюкзак из-за ресурсных ограничений, а другие, доминируемые, могут быть помещены в рюкзак. Такой шаг несложно реализуется алгоритмически и такой подход используется в [139].

5.5. Обобщенная задача о рюкзаке

> Мы разорвали список и молча переглянулись. Джордж сказал:
> — Мы на совершенно ложном пути. Нам следует думать не о тех вещах, которыми мы как-нибудь обойдемся, но о тех, без которых нам никак не обойтись.
>
> *Дж. К. Джером («Трое в одной лодке, не считая собаки»)*

В [121] подробно рассматривается *обобщенная задача о рюкзаке* (ОЗР), которая обобщает классическую задачу в двух направлениях:

— в ОЗР заполнению подлежит не один, а несколько рюкзаков;

— каждый рюкзак является «многомерным», т. е. характеризуется несколькими параметрами (ресурсами).

Формальная постановка такой задачи может иметь следующий вид: пусть имеется n объектов и m рюкзаков; x_{ij} равен 1, если объект i помещается в рюкзак j; a_{il} — ресурс типа $l\,(l=\overline{1,\ r})$, требуемый для объекта i; b_l^j — ограничение на ресурс типа l в рюкзаке j. Тогда имеем

$$\text{максимизировать} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i x_i$$

$$\text{при условиях} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1 \quad \forall i=\overline{1,\ n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{il} x_{ij} \leqslant b_l^j \qquad j=\overline{1,\ m}, \qquad l=\overline{1,\ r}. \tag{5.8}$$

В данной постановке отсутствуют общие ресурсные ограничения (общие, по всем рюкзакам). При учете таких ограничений получается задача, рассмотренная в [121] как обобщенная задача о назначениях. Кроме того, в (5.8) могут быть также учтены и графовые ограничения доминирования на объекты. Рис. 5.5 иллюстрирует многорюкзачную задачу.

При решении подобных задач в основном используется алгоритм ветвей и границ и «пожирающие» алгоритмы [121, 162]. Примером алгоритма, основанного на простейшей итерационной схеме, является следующий [121]: на каждой итерации из числа незагруженных в рюкзаки объектов и недозагруженных рюкзаков выбирается допустимая (с учетом ограничений по ресурсам) и наиболее «эффективная» пара «объект-рюкзак» и осуществляется загрузка объекта в рюкзак, пока существуют допустимые пары.

Можно выделить некоторый набор приемов, используемых при построении алгоритмов решения многорюкзачных задач, например, [81]:

— упорядочение объектов (например, по невозрастанию или неубыванию требуемых ресурсов);

— учет степени заполнения рюкзаков;

— разбиение исходного множества объектов на группы (близких объектов; объектов, составляющих некоторые заданные конфигурации, например, по равномерному использованию всех ресурсов);

— релаксация исходной задачи (отбрасывание условия целочисленности) и др.

Частными случаями ОЗР являются широко известные задачи упаковки, в частности, упаковки в полосу [32, 85, 127], упаковки в контейнеры [8, 32, 49, 139], составления многопроцессорных расписаний [78, 82, 85, 129].

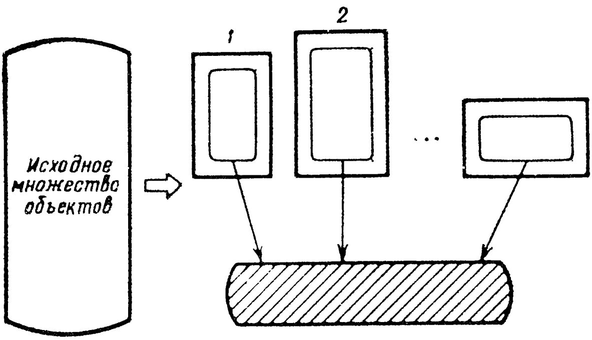


Рис. 5.5. Многорюкзачная постановка

В качестве базовой подзадачи часто используется хорошо исследованная задача упаковки в контейнеры: имеется n объектов с весами $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ и требуется упаковать их в минимальное число одинаковых контейнеров с грузоподъемностью $B (a_i \leqslant B$ $\forall_i = \overline{1,n})$, чтобы ни в одном контейнере не нарушалось ограничение на его грузоподъемность. Для решения этой задачи используются приближенные алгоритмы [8, 32, 129, 139]:

1. «*В первый подходящий*» (ПП). Очередной объект помещается в контейнер с наименьшим номером из числа допустимых.

2. «*В наилучший подходящий*» (НП). В отличие от ПП здесь выбирается контейнер, для которого величина оставшегося ресурса после размещения объекта минимальна.

3. «*В первый подходящий в порядке убывания*» (ППУ). В данном случае объекты перенумеровываются в порядке невозрастания величин a_i, и используется ПП.

4. «*В наилучший подходящий в порядке убывания*» (НПУ) — НП с предварительным упорядочением объектов в порядке невозрастания величин a_i.

При оценке алгоритмов решения задач упаковки используются априорные оценки качества в виде нижней и верхней оценок отношения значения целевой функции, получаемого при работе алгоритма, к оптимальному значению целевой функции [8, 32, 85, 129, 139].

Задаче рюкзачного типа непосредственно соответствует постановка, когда максимизируется число объектов, загружаемых в заданные m контейнеров. При этом используются два метода:

1. *«В первый подходящий в порядке возрастания»* (ППВ). В этом случае в первую очередь размещаются объекты с меньшим объемом.

2. *«В первый подходящий в порядке убывания'»* (ППУ'). Вначале объекты упорядочиваются в порядке неубывания объемов и выделяется набор t первых объектов этого упорядочения, где t: $\sum_{i=1}^{t} a_i \leqslant mB$. Далее с помощью метода ППУ минимизируется число контейнеров для размещения t объектов. Если полученное число контейнеров $m' \leqslant m$, то работа алгоритма заканчивается, если $m' > m$, то из начального набора объектов исключается объект с максимальным объемом и опять применяется ППУ и т. д. Этот метод эффективнее ППВ.

Описанные шесть алгоритмов имеют полиномиальную трудоемкость. Они часто используются как базовые типовые фрагменты при решении многорюкзачных задач. Алгоритмы решения ряда задач максимизации числа загруженных в контейнеры объектов (с учетом различных контейнеров, с учетом отношения доминирования на множестве объектов, с учетом составных объектов) рассмотрены в [139]. В этой работе при решении задач многокритериальной упаковки контейнеров в качестве оптимального рассматривается такое решение, которое обеспечивает максимально возможное число упакованных объектов с минимальным нарушением графового ограничения (за счет дозагрузки объектами, которые доминируются незагруженными объектами, но требуют мало ресурсов). В целом, достаточно общая постановка задачи упаковки объектов в различные контейнеры исследуется на основе метода частичных целей путем рассмотрения различных вариантов: от простейших до сложных.

Интересной с теоретической точки зрения и важной для практики является лестничная (многовариантная) задача упаковки в контейнеры, когда относительно каждого объекта нужно решить не только вопрос об упаковке, но и какой вариант реализации выбрать. Пусть для каждого объекта $i \in V$ имеется q_i вариантов реализации $(k=\overline{1, q_i})$. Тогда для случая m рюкзаков задача имеет вид

$$\text{максимизировать} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{q_i} c_{ik} x_{ijk}$$

$$\text{при условиях} \quad \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{q_i} x_{ijk} \leqslant 1 \quad \forall i = \overline{1, n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{q_i} x_{ijk} a_{ilk} \leqslant b_l^j, \quad j = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, r}. \tag{5.9}$$

В (5.9) могут присутствовать и графовые ограничения. По аналогии с лестничным рюкзаком, алгоритмы решения задач типа (5.9) строятся незначительным усложнением алгоритмов для обычных задач с мультипликативным увеличением трудоемкости на $q_0 = \max_i q_i$. Используются релаксационные алгоритмы, метод дихотомии [45] (в этом случае задача в целом может оказаться в другой градации сложности). В целом, задачи этого плана требуют дополнительного исследования.

5.6. Некоторые модели генерации альтернатив при специальном характере логических связей между элементами

Фиолетовые руки
На эмалевой стене
Полусонно чертят звуки
В звонко-звучной тишине.

В. Я. Брюсов

При формировании допустимых вариантов планов, проектов сложных систем на основе морфологического анализа также могут использоваться некоторые типы рюкзачных моделей [4, 85]. Пусть модель плана, проекта может быть построена на основе рассмотрения множества морфологических уровней (классов) $V = \{1, \ldots, i, \ldots \ldots, n\}$ и q_i — число элементов (вариантов реализации) i-го уровня ($q_0 = \max_i q_i$); x_{ij} — булева переменная, равная 1, если на уровне i выбирается элемент j $(j = \overline{1, q_i})$; $Y_{i,i+1} = \|y_{rk}\|_{q_i \times q_{i+1}}$ — матрицы допустимых соответствий элементов уровней i и $i+1$ $(i = \overline{1, n-1})$, где $y_{rk} = 1$, если допустимо сочетание элемента r уровня i и элемента k уровня $i+1$. Каждый элемент j уровня i характеризуется требуемым ресурсом a_{ij} и локальной полезностью c_{ij}. С учетом аддитивности по критерию и по ресурсу задача имеет вид

$$\text{максимизировать } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q_i} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{при условиях } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q_i} a_{ij} x_{ij} \leqslant b, \quad \sum_{j=1}^{q_i} x_{ij} = 1 \quad \forall i = \overline{1, n},$$

$$(\boldsymbol{x}_i \times Y_{i,i+1}) \cup \boldsymbol{x}_{i+1} \neq \overline{0} \quad \forall i = \overline{1, n-1}, \tag{5.10}$$

где $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{iq_i})$, $\cup$ — операция покомпонентной дизъюнкции элементов двух булевых векторов. Для решения задачи (5.10) может быть применен ε-приближенный (по целевой функции) эффективный алгоритм с трудоемкостью $O(n^2 q_0^2/\varepsilon)$ (модификация алгоритма разбиения на интервалы). На каждом из n шагов алгоритма (в соответствии с морфоклассами) для каждого элемента формируется набор решений (сетка по целевой функции с дискретом $\lfloor \varepsilon p_i / n \rfloor$, где p_i — максимум целевой функции или его оценка сверху на шаге i). Если допустимо соответствие всех элементов различных уровней между собой, то задача (5.10) представляет собой блочную задачу о рюкзаке.

Можно рассматривать задачу (5.10) и с учетом графовых ограничений. Для такого случая схемы решения описаны выше. В [85] иллюстрируется случай генерации альтернатив при иерархической модели проектируемого объекта с учетом многих критериев. Подход к решению основан на том, что в рамках иерархической схемы решения для компонентов генерируемого объекта последовательно решается задача типа (5.10) с ранжированием решений, формированием набора лучших (рис. 5.6).

Важным приложением моделей генерации альтернатив является проектирование различных технологий (переработки информации, материалов и т. п.). В качестве исходной модели технологии

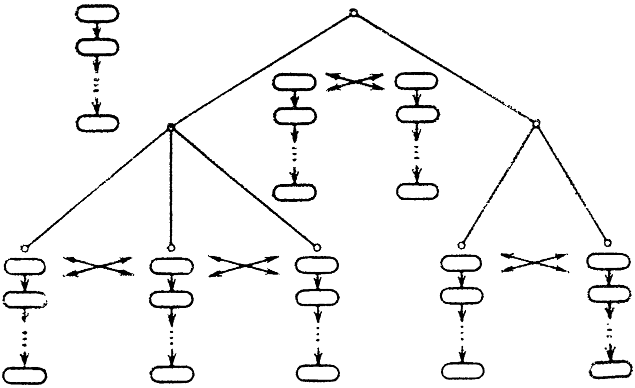


Рис. 5.6. Пример схемы построения сложного объекта

может рассматриваться ориентированный мультиграф с выделенными начальными и конечными вершинами (каждая дуга соответствует варианту переработки материалов, вершина — исходному, промежуточному или результирующему продукту: каждая дуга имеет набор весов — характеристик, соответствующих используемым ресурсам). Примером подобной технологии является последовательно-параллельная схема преобразования информации при решении задачи многокритериальной стратификации объектов (рис. 4.7 [86]). Генерация вариантов лучших технологий может проводиться на основе метода динамического программирования (например, многокритериальное обобщение алгоритма поиска кратчайшего пути) или близких к нему схем решения типа (ε, δ)-приближенных алгоритмов [21, 51, 81].

В [21] предложен алгоритм порождения вариантов, декомпозируемого объекта, недоминируемых по бинарному отношению в критериальном пространстве. Для построения алгоритма используется аналог принципа Беллмана для многокритериальных задач. При этом рассматриваются три типа критериев: аддитивные (стоимость, затраты); мультипликативные (надежность); супремальные (производительность).

Глава 6

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

— Назначьте двенадцать присяжных, шестерых, кто стоит за *удачу*, и шестерых, кто стоит за *науку*. Пусть возьмут две колоды карт, запасутся свечами и идут в совещательную комнату. Правда себя покажет.

М. Твен («Наука или удача»)

При решении практических задач значение имеет разумное проведение этапов анализа прикладной проблемы и разработки схемы ее решения. Существенную помощь в проведении этих этапов, наряду с использованием опыта высококвалифицированного консультанта, могут оказать базовые типовые примеры решения задач. В первую очередь это относится к задачам оценки технического уровня продукции, качества НИОКР, труда исполнителей, сравнения проектных вариантов, формирования планов [1, 4, 38, 85, 86, 90, 94, 101]. Полезными приемами являются решение задач различными методами и сравнение результатов или последовательное решение задачи с уточнением или изменением постановки. В качестве инструментальных средств могут выступать различные автоматизированные системы, процедуры [17, 24, 90—92, 123]. Ниже в данной главе приведены примеры решения нескольких прикладных задач (анализ проблемы, построение схемы решения на основе моделей ранжирования, группового упорядочения, выделения множества лучших объектов). Расчеты проводились на базе системы, описанной в [86, 90—92, 101].

6.1. Комплексный анализ качества машиностроительной продукции

В горах теперь проступок малый
Стараются не замечать.
Провинность большую — прощают:
Мол, все бывает. Не беда.
И в добродетель обращают
Грех превеликий иногда.

Р. Гамзатов («Грехи и кара»)

Современная машиностроительная продукция представляет собой сложные технические системы. При анализе таких систем необходим комплексный системный подход с учетом всех этапов жизненного цикла продукции: НИР, разработка (проектирование, постановка на производство), изготовление, испытания, эксплуатация.

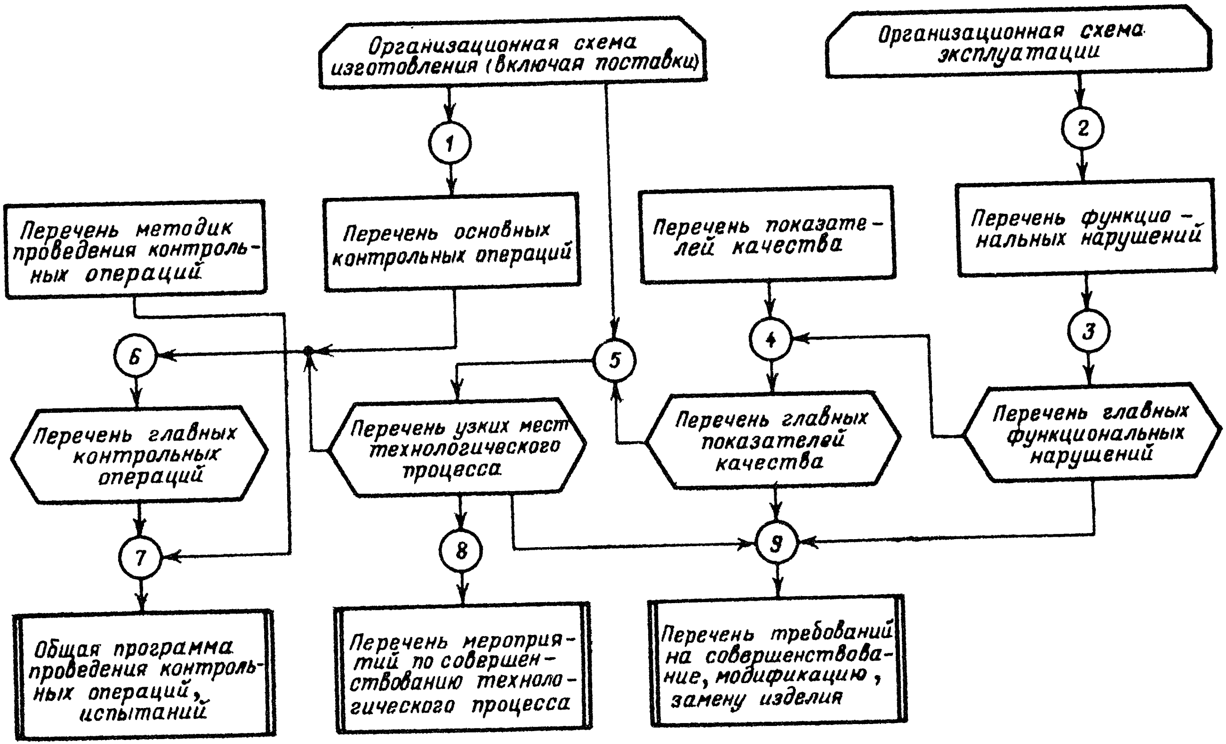


Рис. 6.1. Упрощенная схема анализа качества машиностроительной продукции

Исследования в области управления качеством продукции показывают особую важность потребительских функциональных свойств и параметров продукции [58, 132]. Удовлетворение этих свойств у потребителя (на этапе эксплуатации) должно являться основной отправной точкой при проведении анализа. На рис. 6.1 представлена упрощенная схема комплексного анализа качества машиностроительного изделия. Цифрами обозначены основные укрупненные операции (этапы) по переработке информации. Последовательность осуществления операций представлена на рис. 6.2. Рассмотрим содержание этапов.

ЭТАП 1. На основе содержательного анализа технологии изготовления изделий специалистами формируется перечень основных контрольных операций. Такой перечень может быть иерархическим с учетом различных факторов.

ЭТАП 2. На основе исследования процесса эксплуатации изделий, анализа рекламаций, конъюнктурной информации, тенденций в соответствующей отрасли техники специалистами формируется перечень основных функциональных нарушений (в том числе гипотетических узких мест с учетом перспектив совершенствования изделия).

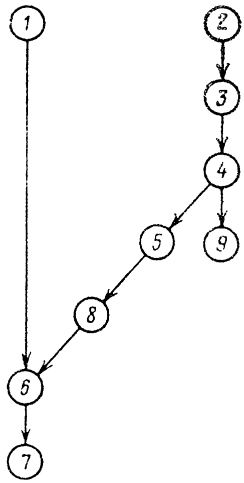


Рис. 6.2. Последовательность проведения этапов преобразования информации

ЭТАП 3. Решается задача выделения главных функциональных нарушений (числом порядка 15—20) на базе многокритериального группового ранжирования.

ЭТАП 4. Решается задача выделения главных показателей качества на базе многокритериального группового ранжирования [90]. В качестве критериев важности показателей может рассматриваться степень влияния на главные функциональные нарушения в случае отклонения значений показателей от нормативных.

ЭТАП 5. Решается задача формирования перечня узких мест в технологическом процессе изготовления изделия (оборудование, организация, нормативно-техническая документация, измерительная техника, комплектующие изделия, сырье и материалы, трудовые ресурсы и др.). При этом может использоваться задача группового ранжирования для исключения из дальнейшего анализа несущественных узких мест. В качестве критериев можно использовать важность для обеспечения нормативных значений главных показателей качества.

ЭТАП 6. Решается задача выделения главных контрольных операций на базе многокритериального группового ранжирования. В качестве критериев могут использоваться характеристики контроля основных узких мест технологического процесса, значений главных показателей качества.

ЭТАП 7. Решается задача формирования комплексных программ проведения контрольных операций и испытаний (выясняется, когда и где в рамках технологического процесса проводится контроль, по каким показателям, по какой методике) на основе многокритериальных моделей рюкзачного типа с учетом ресурсных ограничений и альтернативных вариантов контроля, методик [84]. Последнее обстоятельство приводит к задаче о рюкзаке блочного, лестничного типа.

ЭТАП 8. На основе содержательного анализа проводится формирование предложений по замене устаревшего оборудования, совершенствованию технологической документации, переподготовке кадров и т. п.

ЭТАП 9. На основе содержательного анализа выявляются направления совершенствования, модификации изделия, технологии изготовления и т. п.

Приведенный подход к анализу качества машиностроительных изделий должен включаться в постоянно действующую автоматизированную систему управления качеством продукции и базироваться на следующих системах:

— банк данных по эксплуатации изделия;

— банк данных по технологическому процессу;

— банк данных по поставкам комплектующих изделий, сырья, материалов;

— автоматизированная диалоговая система многокритериального оценивания (ранжирования), планирования;

— банк данных по контрольным операциям, испытаниям.

6.2. Выделение главных показателей качества техники

> Несут гроссбух, приличный том,
> весом почти в двухэтажный дом.
>
> *В. В. Маяковский*

При проведении испытаний, оценке научно-технической документации, разработке НТД на продукцию машиностроения возникает задача анализа характеристик продукции и выделения главных показателей качества [84, 86, 90]. Такая задача основана на групповом ранжировании показателей качества с учетом различных факторов их значимости, важности, взаимосвязи, и представляет собой один из вариантов задачи построения критериальных структур [1, 38, 86]. При формировании программы проверки техники на основе ранжирования показателей часто решается многокритериальная задача формирования портфеля заказов [84, 90]. В качестве ресурсов выступают затраты на проведение контроля показателей, в частности, время. Рассмотрим пример выделения главных показателей качества для полунавесных прицепных тракторных косилок [90].

Таблица 6.1

Номер показателя	Наименование показателя	Экспертные оценки по критериям				Трудозатраты на контроль (час)
		K_1	K_2	K_3	K_4	
1	Ширина захвата	5	4	4	1	0,2
2	Рабочая скорость	5	5	4	3	0,2
3	Производительность	5	4	5	1	0,2
4	Плотность прилегания сегментов к ножевой полосе	4	3	3	5	$0{,}3\times3$
5	Степень прогиба кольцевых брусьев	0	3	0	4	$0{,}4\times3$
6	Качество приспособления режущих аппаратов к рельефу	2	1	1	5	0,4
7	Качество регулирования режущих аппаратов	3	2	3	4	$0{,}4\times5$
8	Качество окраски	0	2	3	0	1,5
9	Ресурс	1	3	4	1	0,4
10	Защита кожухами вращающихся частей	2	4	1	3	0,2
11	Транспортная скорость	1	1	3	0	0,3
12	Показатели хранения	0	4	4	0	0,4
13	Показатели безопасности	3	1	2	1	0,5
14	Число режущих аппаратов	4	3	5	3	0,1
15	Габариты	2	0	1	0	0,5

Исходный перечень показателей качества обычно формируется на основе анализа нормативно-технической документации. Такой перечень даже для сравнительно простых изделий содержит шесть-семь десятков показателей. Перечень показателей для рассматриваемой косилки приведен в табл. 6.1 (по ГОСТ 13571—76).

В качестве критериев оценки важности показателей были использованы следующие [101]:

— влияние на функционально-эксплуатационные свойства (K_1);

— влияние на надежность техники (K_2);

— влияние на экономное использование ресурсов (K_3);

— влияние на ограничение вредных воздействий антропогенного свойства (K_4).

Экспертные оценки показателей качества косилки по указанным критериям важности в 5-балльных шкалах и временные затраты на контроль показателей приведены в табл. 6.1.

Задача формирования программы контроля в данном случае имеет вид

$$\text{максимизировать} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\text{при условиях} \quad \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \leqslant B,$$

$$x_i \geqslant x_j, \quad \text{если} \quad i > j, \quad x_i = 0 \vee 1,$$

где B — общее временное ограничение на проведение контроля, x_i равно 1, если параметр i контролируется, и 0 — в противном случае.

В результате расчетов при весах критериев соответственно 5, 3, 4, 2 выявлено следующее групповое упорядочение показателей качества [90]:

1 группа: 2, 3, 4;
2 группа: 1, 14;
3 группа: 7;
4 группа: 9, 10;
5 группа: 6, 12, 13;
6 группа: 5, 8, 11, 15.

С учетом временных ограничений $B=4$ час $\times 0{,}9$ (коэффициент использования времени) $=3{,}6$ час в перечень главных показателей (в программу контроля) включены: 1, 2, 3, 4, 7, 14.

6.3. Анализ важности отказов компонентов технических устройств

> Она вам откажет, вот увидите. Но вы стойте на своем, не отступайте, говорите, что согласны выйти только за меня и больше ни за кого.
>
> *Ги де Мопассан («Милый друг»)*

При проектировании, анализе качества технических устройств возникает задача выявления элементов, компонентов сложных систем, оказывающих наибольшее влияние на качество всего изделия. В общем случае такая задача является выявлением узких мест в некоторой сложной системе, причем в качестве свойств такой системы могут рассматриваться: устойчивость (например, живучесть), помехоустойчивость, управляемость, самоорганизация и др. Рассмотрим конкретную задачу анализа значимости отказов компонентов технических устройств [88]. Выявление наиболее значимых компонентов позволяет перейти к исследованию основных путей повышения надежности технической системы на базе изучения физики отказов, построения моделей отказов для выделенных элементов системы.

Проведение анализа значимости отказов компонентов технических устройств включает следующие основные этапы: 1) анализ системы, выделение подсистем, компонентов, построение иерархической модели, формирование перечня основных компонентов; 2) построение системы критериев для оценки значимости компонентов, разработка шкал; 3) оценка компонентов по критериям (анализ статистической отчетности, расчеты, испытания, моделирование, экспертизы и т. п.); 4) ранжирование компонентов по значимости; 5) анализ решения.

В качестве моделей систем в основном используют сети, многоуровневые графы, деревья. При древовидной модели в перечень основных компонентов следует включать элементы, соответствующие висячим вершинам. Кроме того, могут рассматриваться и другие вершины дерева, если они важны с точки зрения общесистемных свойств. В последнем случае можно вводить дополнительные висячие вершины, соответствующие таким свойствам.

При анализе значимости отказов компонентов технических устройств в качестве базовой может использоваться следующая система критериев:

— частота отказов компонента (%) — K_1;

— время простоя устройства из-за отказа компонента (час) — K_2;

— стоимость работ по восстановлению (руб.) — K_3;

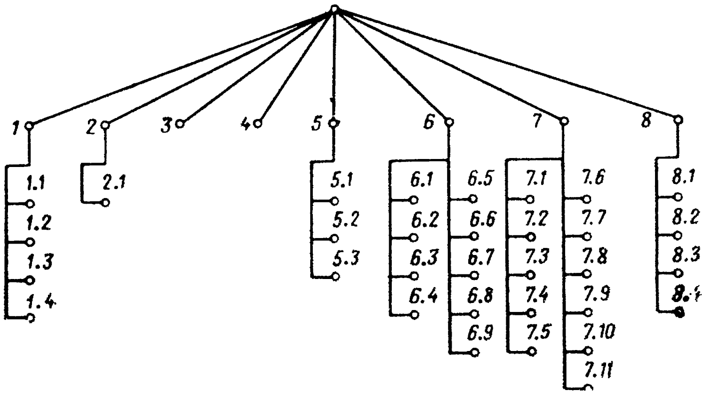


Рис. 6.3. Древовидная модель нагнетателя газоперекачивающих агрегатов

— степень влияния отказа на другие компоненты (0 — не влияет, 1 — влияет, 2 — сильно влияет) — K_4;

— масштабы использования компонентов (0 — используется только в данном устройстве, 1 — используется в других системах, 2 — широко используется) — K_5;

— степень влияния отказа компонента на безопасность (0 — не влияет, 1 — влияет) — K_6.

Рассмотрим анализ значимости отказов компонентов технического устройства на примере нагнетателя газоперекачивающих агрегатов. Древовидная модель нагнетателя изображена на рис. 6.3 и имеет следующие обозначения: 1 — корпусные детали: внешний корпус (1.1), крышки корпуса (1.2), внутренний корпус с закладными элементами (1.3), уплотнения корпуса (1.4); 2 — опорные подшипники: колодки (2.1); 3 — уплотнения щелевые масляные; 4 — ротор; 5 — узлы соединения нагнетателя с приводом: полумуфта (5.1), зубчатая обойма (5.2), торсионный вал (5.3); 6 — система смазки: маслобак (6.1), маслофильтры (6.2), основной маслонасос (6.3), пусковой маслонасос (6.4), арматура (6.5), клапаны (6.6), регуляторы температуры (6.7), маслоохладители (6.8), вентиляторы маслоохладителей (6.9); 7 — система масляных уплотнений: маслобак (7.1), маслофильтры (7.2), насос главный (7.3), насос пусковой

Таблица 6.2

Обозначение элемента	Оценки по критериям					
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
1.1	0,22	128	178,98	0	0	1
1.2	0	128	178,98	0	0	1
1.3	0,87	128	178,98	1	0	0
1.4	0,22	128	178,98	0	0	1
2.1	1,19	64	55,16	2	0	0
2	1,53	64	55,16	2	0	0
3	0,3	96	64,32	1	0	0
4	6,8	128	178,98	1	0	0
5.1	0	48	58,52	1	0	0
5.2	0,16	48	58,52	1	0	0
5.3	0,94	32	37,12	1	0	0
6.1	0,1	16	11,88	0	0	0
6.2	0,49	16	11,88	1	0	0
6.3	5,56	32	39,04	1	0	0
6.4	0,81	32	31,04	1	0	0
6.5	0,32	8	13,56	1	1	0
6.6	0,32	8	13,56	1	1	0
6.7	0,17	8	13,56	1	1	0
6.8	1,47	288	486,82	1	1	0
6.9	0,66	16	25,24	1	1	0
7.1	0	16	11,88	0	0	0
7.2	0,32	16	11,88	1	0	0
7.3	0	8	13,56	1	0	0
7.4	0,17	32	31,4	1	0	0
7.5	1,47	24	20,36	1	2	0
7.6	0	8	18,56	1	0	0
7.7	1,47	16	29,26	0	0	0
7.8	1,36	24	20,36	1	0	0
7.9	0,69	8	13,56	0	0	0
7.10	0,17	8	13,56	1	0	0
7.11	70,41	8	13,56	2	0	0
8.1	0,19	32	13,56	2	0	0
8.2	0	32	13,56	2	0	0
8.3	0	32	13,56	2	0	0
8.4	0	32	13,56	2	0	0
8	0,69	32	13,56	2	0	0

(7.4), регулятор перепада давления (7.5), гидроаккумулятор (7.6), дегазатор (7.7), маслоотводчик (7.8), трубопроводы (7.9), клапаны (7.10), уплотнительные резиновые кольца (7.11); 8 — упорные подшипники: колодки (8.1), уплотнительные кольца (8.2), упорные кольца (8.3), дистанционные кольца (8.4).

В табл. 6.2 приведены оценки компонентов по указанным выше критериям (на основе расчетов, обработки статистических данных, экспертиз).

Групповое ранжирование компонентов проводилось при следующей базовой системе весов критериев, соответственно: 10, 3, 4, 5, 2, 30. Были выделены следующие упорядоченные по важности группы компонентов:

1 группа: 2.1, 2, 4, 6.3, 6.8, 7.11;

2 группа: 1.3, 5.3, 6.4, 7.5, 7.8;

3 группа: 1.1, 1.4, 3, 5.1, 5.2, 6.5, 6.6, 6.9, 7.4, 7.7, 8.1, 8;

4—5 группы: остальные компоненты.

6.4. Проектирование каналов связи в информационно-вычислительных сетях

— Меня поражает не то, как его убили, а то, что его убили вовремя.

Ж. Сименон («Мегрэ в Нью-Йорке»)

При проектировании информационно-вычислительных сетей возникает задача выбора каналов связи между узлами связи [89]. В качестве проектных вариантов обычно рассматриваются: выделенный или коммутируемый телефонный канал, коммутируемый телеграфный канал, коммутируемый канал сети ПД-200. Требуется выбрать для каждой линии, соединяющей узлы сети, вариант связи с учетом ряда требований критериев, ресурсных ограничений [37, 142, 171]:

— повышение оперативности передачи информации (уменьшение среднего времени установления связи, задержки сообщения, увеличение скорости передачи информации);

— учет приоритета пользователей;

— повышение характеристик надежности сети, достоверности передачи сообщений;

— обеспечение стабильности качества работы сети при изменении внешних условий, в частности, трафика;

— уменьшение затрат на создание, функционирование сети.

Для решения такой задачи можно использовать трехэтапную схему решения. На первом этапе на основе таких характеристик, как приоритеты пользователей, вид передаваемой информации, характера обмена информацией (преимущественный диалог или перекачка массивов), требуемая достоверность, трафик и др., проводится многокритериальное ранжирование всех линий соединения узлов сети. На основе содержательного анализа результатов ранжирования для наиболее важных линий связи директивно назначаются выделенные телефонные каналы, для наименее важных — дешевые коммутируемые телефонные или телеграфные.

Это снижает размерность задачи. Далее используется двухэтапная схема, представляющая собой модификацию метода уступок [87]. На втором этапе для остальных линий связи решаются однокритериальные подзадачи при различных значениях исходных данных (вариант трафика и др.). Получаемые локально оптимальные решения оцениваются по всему набору критериев и из этого множества решений выделяются оптимальные по Парето. На третьем этапе проводится ранжирование полученных вариантов решений.

Введем обозначения: i — номер линии связи ($i=\overline{1, n}$); j — номер проектного варианта ($j=\overline{1, m}$); b_{ij} — затраты на организацию, функционирование варианта связи j на линии i; a_i — трафик по линии связи i для варианта общего трафика; c_{ij} — время задержки на установление связи при варианте j на линии i; c — ограничение на максимальное среднее время задержки при установлении связи; b — ограничение на общие затраты; q_{ij} — вероятность нарушения связи на линии i при варианте j; p — ограничение на надежность функционирования сети; x_{ij} — булева переменная, равная 1, если выбирается вариант j на линии i, и 0 — в противном случае.

В качестве подзадач можно использовать, например, следующие блочные задачи рюкзачного типа (с ограничением $\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=1, \quad i=\overline{1, n}$):

$$\text{минимизировать } t_{\text{ср}}=\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{при условиях } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_{ij}\leqslant b, \quad \prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{m}(1-q_{ij}^{x_{ij}})\right]^{a_i}\geqslant p; \qquad (6.1)$$

$$\text{минимизировать } z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_{ij}$$

$$\text{при условиях } \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\leqslant c, \quad \prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{m}(1-q_{ij}^{x_{ij}})\right]^{a_i}\geqslant p; \qquad (6.2)$$

$$\text{максимизировать } p^*=\prod_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{m}(1-q_{ij}^{x_{ij}})\right]^{a_i};$$

$$\text{при условиях } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_{ij}\leqslant b, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\leqslant c. \qquad (6.3)$$

Задача (6.1) направлена на минимизацию среднего времени задержки и должна решаться при различных значениях b, p, вариантах трафика; задача (6.2) направлена на минимизацию затрат при различных значениях c, p; задача (6.3) направлена на максимизацию надежности функционирования сети при различных значениях b, c. Рассматриваемые модели являются дискретными, а целевые функции имеют вид ступенчатых при изменении значений ограничений b, c, p в пределах соответствующих интервалов, изменении варианта общего трафика в рамках некоторого набора вариантов. Таким образом, может быть достаточно эффективно сформировано дискретное множество оптимальных по Парето решений.

Таблица 6.3

Номер варианта решения	Вариант трафика									
	1		2		3		4		5	
	$t_{ср}$	z	$t_{ср}$	z	$t_{ср}$	z	$t_{ср}$	z	$t_{ср}$	z
1	1,54	129,6	0,47	131,7	1,54	180,7	1,54	244,6	0,47	265,3
2	1,54	129,6	0,47	131,7	1,54	180,7	1,54	244,6	0,47	265,3
3	0,55	160,4	0,27	165,2	0,55	179,1	0,55	202,5	0,27	250,2
4	0,55	160,4	0,27	165,2	0,55	179,1	0,55	202,5	0,27	250,2
5	0,26	254,8	0,08	255,7	0,25	260,2	0,25	266,9	0,08	275,9
6	0,65	159,8	0,39	164,6	0,65	178,6	0,65	201,9	0,39	249,7
7	0,84	160,3	0,33	164,9	0,84	178,8	0,84	202,2	0,33	249,9
8	0,42	198,2	0,17	201,3	0,42	212,6	0,42	230,6	0,17	262,1
9	0,42	198,2	0,17	201,3	0,42	212,6	0,42	230,6	0,17	262,1
10	0,55	160,4	0,27	165,2	0,55	179,1	0,55	202,5	0,27	250,2
11	0,55	160,4	0,27	165,2	0,55	179,1	0,55	202,5	0,27	250,2
12	0,26	254,8	0,08	255,7	0,25	260,2	0,25	266,9	0,08	275,9
13	0,42	198,2	0,17	201,3	0,42	212,6	0,42	230,6	0,17	262,1

В табл. 6.3 приведены характеристики ряда оптимальных решений на основе использования исходных данных примера и модели задачи из [86]. Были рассмотрены 5 вариантов общего трафика.

Среднее время задержки $t_{ср}$ измерено в минутах, затраты z — в тыс. руб. При весах важности вариантов трафика соответственно 9, 11, 13, 9, 7 были выделены следующие группы решений:

— 3, 4, 10, 11;
— 6;
— 7, 8, 9, 13;
— 1, 2, 5, 12.

6.5. Планирование застройки жилых районов

> У самого же леса, на высоком холме, откуда открывался чудный вид на окрестность, стоял новый роскошный дом.
>
> *Х. Андерсен («Всему свое место»)*

Планирование застройки жилых районов связано с учетом большого числа различных факторов: экономических, социальных, экологических и др. В условиях большого города сложность этой задачи возрастает. Обычно процесс планирования застройки разбивается на ряд этапов: 1) формирование перечня площадей для застройки; 2) оценка площадей, выбор лучших; 3) формирование вариантов застройки (этажности нового строительства); 4) оценка вариантов этажности, выбор лучших вариантов; 5) анализ решений.

Указанные этапы тесно связаны между собой, возможны повторные решения с уточненной информацией. Этапы 1, 3 связаны, в основном, с содержательной работой по подготовке исходного набора альтернатив, хотя и здесь могут быть использованы формальные методы. Этапы 2, 4 проводятся по обычной схеме:

— разработка системы критериев, шкал;

— оценка альтернатив;

— ранжирование альтернатив;

— анализ решения.

Рассмотрим этапы 2, 3 для шести площадок застройки: А, Б, В, Г, Д, Е. В качестве системы критериев можно использовать следующую:

— удельный объем капитальных вложений (руб./кв. м) — K_1;

— удельные эксплуатационные затраты (руб./кв. м) — K_2;

— приведенные затраты (руб./кв. м) — K_3;

— удобство сообщения с местами труда (2 — плохое, 3 — удовлетворительное, 4 — хорошее) — K_4;

— удобство сообщения с общественным центром (2 — плохое, 3 — удовлетворительное, 4 — хорошее) — K_5;

— удобство сообщения с местами отдыха (2 — плохое, 3 — удовлетворительное, 4 — хорошее) — K_6;

— реальность освоения (0 — трудно осваиваемая, 1 — осваиваемая) — K_7;

— санитарно-гигиенические характеристики (2 — плохие, 3 — средние, 4 — хорошие) — K_8;

— ландшафтно-эстетические характеристики площадок (2 — плохие, 3 — средние, 4 — хорошие) — K_9.

По первым трем критериям лучшие оценки соответствуют меньшим значениям. В табл. 6.4 приведены оценки площадок по критериям.

Таблица 6.4

Наименование площадки	Оценки по критериям								
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9
А	326,4	25,8	65,2	4	3	4	1	3	3
Б	368,2	27,7	71,8	3	2	3	0	2	3
В	359,5	27,7	70,8	2	2	2	0	3	4
Г	349,8	27,7	69,6	4	2	2	1	2	3
Д	409,5	30,7	79,8	3	2	4	1	4	4
Е	400,5	29,2	77,6	3	2	4	1	4	4

При ранжировании площадок были проведены расчеты двух типов:

— для выбора первоочередных площадок (система весов критериев, соответственно: 5, 5, 5, 4, 3, 2, 4, 4, 1);

— для перспективного анализа площадок (система весов критериев: 4, 4, 4, 5, 5, 5, 3, 5, 2).

Были введены два эталонных варианта (лучший, худший). Результаты расчетов приведены на рис. 6.4 (*а* и *б* соответственно).

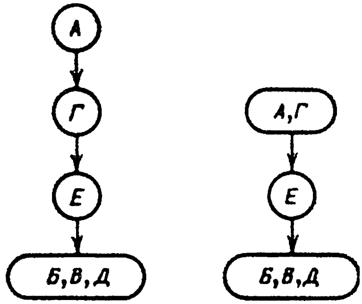
Рассмотрим этапы 3 и 4. В табл. 6.5 приведены 20 вариантов застройки (по этажности) нового строительства. В качестве системы критериев можно использовать следующую:

— удельные капитальные вложения (руб./кв.м) — K_1;

— удельные эксплуатационные затраты (руб/кв.м) — K_2;

— плотность застройки микрорайона (м²/га) — K_3;

— гигиенические характеристики (0 — больше 70 % этажей выше 9, 1 — больше 70 % этажей ниже 10) — K_4;



а *б*

Рис. 6.4. Ранжирование площадок для строительства

— полнота набора типов этажности (0 — менее трех типов; 1 — более двух типов) — K_5;

Таблица 6.5

Номер варианта застройки	Распределение по этажности (%)					
	4	9	12	14	16—17	≥22
1	100	—	—	—	—	—
2	75	—	—	—	—	25
3	50	—	—	15	20	15
4	50	20	—	15	10	5
5	40	—	—	—	50	10
6	40	20	—	15	25	—
7	40	15	—	10	25	10
8	25	—	—	—	50	25
9	11	—	—	45	30	10
10	10	10	10	20	40	10
11	8	10	—	40	30	12
12	40	—	—	25	25	10
13	—	35	—	30	25	10
14	—	20	—	50	30	—
15	—	10	10	40	30	10
16	—	—	—	50	40	10
17	—	—	—	33,5	51,5	15
18	—	—	—	10	60	30
19	—	—	—	—	100	—
20	—	—	—	—	—	100

— равномерность этажности (1 — 33 % четырехэтажных, 33 % — девятиэтажных, 22 % — 12-этажных домов и др.; 0 — иначе) — K_6;

— оценка населения (0—5 баллов) — K_7.

По первым трем критериям лучшие оценки соответствуют меньшим значениям. В табл. 6.6 приведены оценки вариантов застройки

Таблица 6.6

Номер варианта застройки	Оценка по критериям						
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
1	291,6	18,2	7200	1	0	0	5
2	282,7	21,3	8125	1	0	0	3
3	269,1	21,2	8810	0	1	0	2
4	267,9	19,7	7400	1	1	0	3
5	264,8	21,6	9220	0	1	0	2
6	262,4	19,8	8760	0	1	1	3
7	263,8	20,84	8910	0	1	1	3
8	259,5	23,5	9775	0	1	0	2
9	250,5	21,7	9750	0	1	0	2
10	249,1	21,9	9800	0	1	0	2
11	247,6	22,0	9860	0	1	0	2
12	243,9	21,4	9470	0	1	0	2
13	243,7	21,5	9785	0	1	0	2
14	241,8	20,8	10 045	0	1	0	2
15	243,0	22,0	1100	0	1	0	2
16	243,0	22,4	10 215	0	1	0	1
17	244,8	23,1	10 300	0	1	0	1
18	247,8	24,7	10 560	0	1	0	1
19	245,1	22,6	10 500	0	0	0	1
20	256,1	30,4	10 900	0	0	0	0

по критериям. Были проведены расчеты для выбора первоочередных вариантов застройки (соответственно, веса критериев: 5, 5, 5, 3, 3, 3, 2) и перспективных (4, 4, 5, 4, 5, 5, 4). При этом использовались два эталонных варианта (лучший, худший). Результаты расчетов приведены на рис. 6.5 (*а* и *б* соответственно).

Можно применять обобщенную задачу выбора площадок и вариантов застройки (рис. 6.6). Пусть x_{ij} — булева переменная, равная 1, если площадка i $(i=\overline{1, n})$ застраивается по варианту j $(j=\overline{1, m})$, и 0 — в противном случае. Введем обозначения: a_{ij} — объем жилой площади при застройке площадки i по варианту j; b_{jl} — объем ресурса (например, агрегированных строительных изделий) типа l $(l=\overline{1, r})$, требуемого при реализации варианта застройки j; b_l — ограничение на ресурс типа l (аналогично b_l^i — огра-

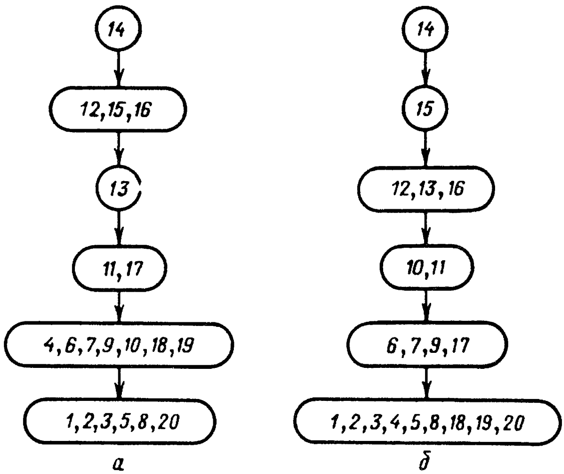


Рис. 6.5. Ранжирование вариантов застройки

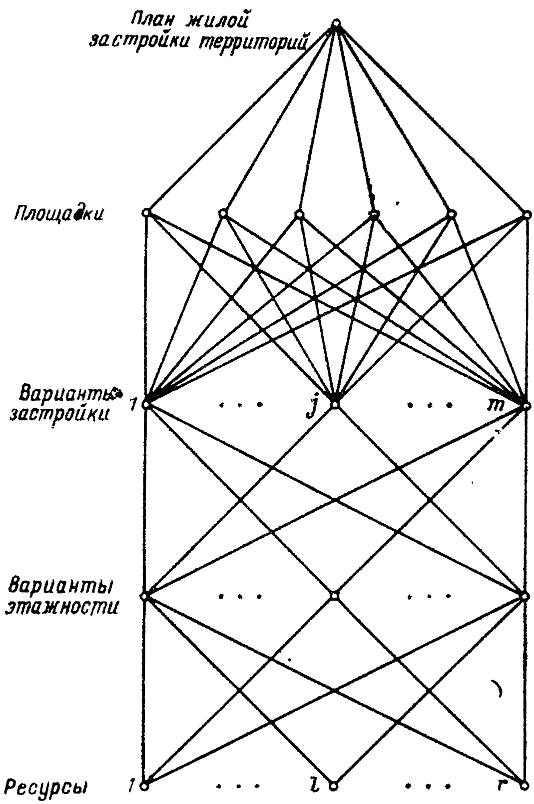


Рис. 6.6. Иерархическая схема формирования плана жилой застройки территорий

ничение на площадке i); $G^1=(V^1, U)$ — орграф доминирования (соответствующий бинарному отношению предпочтения-безразличия) на множестве площадок $V^1=\{i|i=\overline{1, n}\}$; $G^2=(V^2, U)$ — орграф доминирования на множестве застройки $V^2=\{j|j=\overline{1, m}\}$. Обобщенная задача имеет вид:

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij}$$

$$\text{при условиях } \sum_{j=1}^{m} x_{i_1 j} \geqslant \sum_{j=1}^{m} x_{i_2 j}, \quad \text{если} \quad i_1 > i_2 \quad \forall i_1, i_2 \in V^1,$$

$$j=\overline{1, m},$$

$$x_{ij_1} \geqslant x_{ij_2}, \quad \text{если} \quad j_1 > j_2 \quad \forall j_1, j_2 \in V^2, \quad i=\overline{1, n},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{jl}x_{ij} \leqslant b_l, \quad l=\overline{1, r},$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_{jl}x_{ij} \leqslant b_l^i, \quad l=\overline{1, r}, \quad i=\overline{1, n}.$$

Рассмотренные выше постановки являются подзадачами данной постановки. Переход от вариантов этажности к вариантам застройки может основываться на морфологическом анализе, учет ресурсов — на основе расчетов характеристик.

6.6. Одна задача прогнозирования

Сегодня вечером на
Патриарших будет
интересная история.

*М. А. Булгаков («Мастер
и Маргарита»)*

В качестве объекта прогноза могут выступать число, вектор, функция и др. Прогнозирование направлений развития научно-технического прогресса, например, может базироваться на формировании некоторого взаимосвязанного набора нововведений. Такой процесс можно представить как последовательность этапов, каждый из которых (или почти каждый) является решением дискретной задачи принятия решений. В качестве объектов, элементов обработки при этом выступают нововведения, критерии или показатели качества, эксперты.

Рассмотрим пример последовательности этапов прогнозирования:

— формирование (генерация) множества нововведения;
— анализ нововведений, их взаимосвязей;
— разработка системы критериев, показателей качества и эффективности для оценки нововведения;
— оценка нововведения по критериям;
— групповое упорядочение нововведений;

— выделение некоторого подмножества «лучших» нововведений (с учетом ресурсных ограничений и т. п.) — формирование портфеля заказов.

На каждом из указанных этапов возможно решение задач оценки, выбора экспертов, формирования экспертных групп. Кроме того, могут использоваться дополнительные этапы, направленные на формирование и выбор локальных наборов (комплексов) взаимосвязанных нововведений (генерация, оценка, упорядочение, формирование портфеля заказов).

Дополнение к главе 5

ВЕКТОРНЫЙ КРИТЕРИЙ БЛИЗОСТИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР

Во многих ситуациях (при анализе решений, агрегировании данных и др.) возникает потребность в оценке близости бинарных отношений (графов). Обычно исследуются и применяются различные меры близости структур в виде действительно-значных скалярных функций, удовлетворяющих аксиомам метрики (или псевдо-метрики) [99]. Рассмотрим векторные оценки близости для слоистых структур (ранжировок). Эти результаты верны и для линейных упорядочений. Ниже анализируются свойства таких векторных оценок близости и их применение на этапах ранжирования многокритериальных объектов (при сравнительном анализе структур, при агрегации структур и др.). При этом некоторые модели агрегирования сводятся к моделям рюкзачного типа.

Важным частным случаем графа G является размытая слоистая структура S_f, допускающая отнесение объекта к группам последовательных страт: $\forall i \in V$ определяется номер $\pi(i)$ или диапазон d_i страт, к которым принадлежит i, т. е. $d_i = [d_i^1, d_i^2]$, $1 \leqslant d_i^1 \leqslant d_i^2 \leqslant m$ и $\pi(i) = d_i^1$ при $d_i^1 = d_i^2$ (таким образом, задается система интервалов $\{d_i\}$) [85].

По аналогии можно определить разбиения на кластеры и размытые кластеры. Иногда особый практический интерес имеет сравнение структур, представляющих объединение однотипных графов, например, цепочек — NC, слоистых структур — NS.

Обычно используются меры близости в виде скалярных функций, удовлетворяющих аксиомам метрики (псевдометрики) Фреше [99, 119]. Наиболее широко используемой является мера близости Кендалла.

Обозначим матрицу смежности для графа G через $\|g_{ij}\|$ $(i, j \in V)$:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i > j, \\ 0, & i \sim j, \\ -1, & j > i. \end{cases}$$

Тогда мера близости по Кендаллу между графами G^1 и G^2 определяются следующим образом:

$$\rho(G^1, G^2) = \sum_{i<j} |g_{ij}^1 - g_{ij}^2|,$$

где g^1_{ij}, g^2_{ij} — элементы матриц отношений для G^1 и G^2 соответственно.

В [99] рассмотрен более общий случай — структурная мера близости, учитывающая веса инверсий соседних элементов структуры. Для оценки близости двух последовательностей (аналог C) применяют длину общей подпоследовательности. Такой подход может быть распространен и на более общие графы за счет оценки общего подграфа двух графов (типа мощности множества вершин общего подграфа и т. п.).

Введем векторные оценки близости для слоистых структур. Пусть $P(S)$ — множество всех слоистых структур на V.

Определение 1. Погрешностью первого порядка $\forall i \in V$ и второго порядка $\forall (i, j) \in \{V \times V \mid i \neq j\}$ на S, $Q \in P(S)$ назовем:

$$\Delta\pi(i, S, Q) = \pi(i, S) - \pi(i, Q),$$
$$\Delta\pi(i, j, S, Q) = \pi(i, S) - \pi(j, S) - [\pi(i, Q) - \pi(j, Q)],$$

где $\pi(i, S) = l$ при $i \in V_l$ в S.

Таким образом, для оценки несовпадений S, $Q \in P(S)$ по i и (i, j) имеем целочисленную шкалу с градациями $-(m-1) \leqslant r \leqslant m-1$ для $\pi(i, S, Q)$ и $-2(m-1) \leqslant r \leqslant 2(m-1)$ для $\pi(i, j, S, Q)$.

Определение 2. Назовем векторами погрешности (близости) S, $Q \in P(S)$, соответственно по элементам i (первого порядка) и парам (i, j) (второго порядка) векторы

$$\bar{x}(S, Q) = (x^{-(m-1)}, \ldots, x^{-1}, x^1, \ldots, x^{m-1}), \qquad (11)$$
$$\bar{y}(S, Q) = (y^{-2(m-1)}, \ldots, y^{-1}, y^1, \ldots, y^{2(m-1)}), \qquad (12)$$

где компоненты векторов определяются следующим образом:

$$x^r = |\{i \in V \mid \Delta\pi(i, S, Q) = r\}|/n,$$
$$y^r = 2|\{(i, j) \in \{V \times V \mid i \neq j\} \mid \Delta\pi(i, j, S, Q) = r\}|/[n(n-1)].$$

Представляет интерес введение подобных векторов более высокого порядка. Кроме того, при определении компонентов векторов можно рассматривать взвешенные погрешности первого и второго порядка с учетом зависимости от соответствующих номеров l страт V_l.

Обозначим диапазон значений верхних индексов компонентов векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ через B, отрицательных — B^-, положительных — B^+.

Можно использовать векторы с агрегированными компонентами вида (для $\bar{y}$ аналогично):

$$x^{k_1, k_2} = \sum_{r=k_1}^{k_2} x^r, \quad x^{\leqslant -k^-} = \sum_{r=-(m-1)}^{-k} x^r, \quad x^{\geqslant k^+} = \sum_{r=k}^{m+1} x^r,$$
$$x^{|r|} = x^r + x^{-r}.$$

Определение 3. Назовем модулем векторов величину

$$|\bar{x}(S, Q)| = \sum_{r \in B} x^r, \quad |\bar{y}(S, Q)| = \sum_{r \in B} y^r.$$

Далее будем рассматривать векторы в основном на примере $\bar{x}$.

Определение 4. Назовем векторы усеченными, если

а) часть крайних компонентов отброшена, например,

$$\bar{x}(S, Q) = (x^{-k^-}, x^{-(k^- - 1)}, \ldots, x^{k^+ - 1}, x^{k^+}),$$

где выполняются одно или оба условия $k^- < m - 1$, $k^+ < m - 1$;

б) используются агрегированные компоненты, например,

$$\begin{aligned} &\bar{x}(S, Q) = (x^{\leqslant -k^-}, \ldots, x^{k_1 - 1}, x^{k_1, k_2}, x^{k_2 + 1}, \ldots, x^{\geqslant k^+}), \\ &\bar{x}(S, Q) = (x^{|1|}, \ldots, x^{|r|}, \ldots, x^{|k|}). \end{aligned} \tag{13}$$

Определение 5. Назовем вектор $\bar{x}$ ($\bar{y}$):

а) двусторонним, если $B^+ \neq \varnothing$, $B^- \neq \varnothing$;

б) односторонним, если или $B^+ = \varnothing$, или $B^- = \varnothing$;

в) симметричным, если $\forall r \in B^+$ $\exists -r \in B^-$ и наоборот;

г) модульным — типа (13).

На компонентах векторов $\bar{x}$ (11) и $\bar{y}$ (12) естественно вводятся два линейных упорядочения по силе (слабости) следующего вида: компонента $1\,(-1) \prec$ компонента $2\,(-2) \prec \ldots \prec$ компонента $k\,(-k)$.

В случае агрегированных компонентов порядок аналогичен.

Определение 6. $\bar{x}_1(S, Q) \succ \bar{x}_2(S, Q)$ (предпочтительнее, не слабее), $B(\bar{x}_1) = B(\bar{x}_2)$, S, $Q \in P(S)$, если каждое уменьшение слабых компонентов $\bar{x}_1$ по сравнению с $\bar{x}_2$ компенсировано соответствующим увеличением сильных компонентов, т. е. при r, $p \in B^+$ $(-r, -p \in B^-)$

$$\sum_{r \geqslant p} x_1^r - \sum_{r \geqslant p} x_2^r \geqslant 0 \quad \forall p \in B^+ \quad (\forall -p \in B^-, -r \leqslant -p). \tag{14}$$

Можно усилить условие (14) за счет использования правой части, равной $\gamma \geqslant 0$.

Определение 7. Назовем граничным множеством следующее: $\Gamma = \left\{\bar{x} \in X \,\middle|\, \sum_{r \in B} x^r = 1\right\}$ (для $\bar{y}$ аналогично).

Для каждого $\bar{x}$ ($\bar{y}$) существует доминирующее его подмножество $\Gamma D(\bar{x}) = \{\bar{\eta} \in \Gamma \,|\, \bar{\eta} \succ \bar{x}\}$.

Определение 8. Назовем векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ ($\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$):

а) сравнимыми, если $\bar{x}_1 \succ \bar{x}_2$ (из этого следует, что $D(\bar{x}_2) \supseteq D(\bar{x}_1)$ и обратно);

б) сильно несравнимыми, если $D(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = D(\bar{x}_1) \,\&\, D(\bar{x}_2) = \varnothing$;

в) слабо несравнимыми, если $D(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq \varnothing$, $D(\bar{x}_1) \subseteq D(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $D(\bar{x}_2) \subseteq D(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Введенные типы несравнимости векторов могут быть использованы в критериальных пространствах. Например, на основе опроса ЛПР (при выяснении, имеют ли два вектора общие доминирующие векторы) можно определить характер кривизны линий безразличия. Это открывает принципиально новые возможности при организации опроса ЛПР.

Можно выделить следующие свойства векторов близости:

1. Условие (14) определяет частичный порядок.
2. $0 \leqslant |\bar{x}(S, Q)| \leqslant 1$, $0 \leqslant |\bar{y}(S, Q)| \leqslant 1$ $\forall S, Q \in P(S)$.
3. $\bar{x}(S, Q) > \bar{0}$, $\bar{y}(S, Q) > \bar{0}$ $\forall S, Q \in P(S)$.
4. Для односторонних векторов выполняется:
$\bar{x}(S, Q) < (0, 0, \ldots, 0, 1)$, $\bar{y}(S, Q) < (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
5. Для всякого двустороннего вектора
$\bar{x}(S, Q)$, $\forall S, Q \in P(S)$, $\exists \bar{e} = (e^{-k^-}, 0, \ldots, 0, e^{k^+}) \in \Gamma$, что $\bar{x}(S, Q) < \bar{e}$ (для $\bar{y}$ аналогично).
6. Для всякого $\bar{x}(S, Q)$, $\forall S, Q \in P(S)$ $\exists \bar{e} \in \Gamma$ такое, что $\bar{x}(S, Q) < \bar{e}$ (для $\bar{y}$ аналогично).
7. Для всякого модульного вектора выполняется:
$\bar{x}(S, Q) = \bar{x}(Q, S)$ (для $\bar{y}$ аналогично).
8. Для всякого двустороннего симметричного вектора выполняется $\bar{x}(S, Q) = \bar{x}^*(Q, S)$, где $x^{*r} = x^{-r} \forall r$ (для $\bar{y}$ аналогично).
9. Для всякого $\bar{x}(S, Q)$, $\forall S, Q \in P(S)$ из $\bar{x}(S, Q) = \bar{0}$ следует $S = Q$.

Векторные оценки близости структур могут использоваться в рамках типовых аналитических процедур, таких как сравнение различных результатов; агрегирование различных результатов; анализ чувствительности (оценка изменения результата при изменении исходных данных, например, критериев, оценок объектов по критериям и др.); анализ влияния (выявление исходных данных, например, критериев, влияющих на значение выбранных компонентов результата); анализ возможностей (определение значений исходных данных, обеспечивающих желаемый результат); анализ риска (оценка изменения результата при случайных изменениях исходных данных).

Особое значение имеет при этом организация цепи обратной связи, формирование корректирующих воздействий, адаптация технологии решений.

При решении различных задач можно конструировать специальные векторы оценок близости и использовать их (или их наборы). Например, пусть имеется эталонная функция выбора $\Phi^*(V)$, определяющая двуслойную структуру S^*. Для оценки качества некоторой функции выбора $\Phi(V)$, определяющей двуслойную структуру S, можно использовать $\bar{x}(S, S^*) = (x^{-1}, x^1)$ и вектор-ограничение $\bar{x}_0 = (x_0^{-1}, x_0^1)$. Если мы хотим выбрать все эффективные решения и согласны на включение в множество $\Phi(V)$ некоторых неэффективных элементов, то можно использовать $\bar{x}_0 = (\beta, 0)$, $\beta \in [0, 1]$. Для противоположного случая $\bar{x}_0 = (0, \beta)$.

Поскольку на множестве векторов $\bar{x}(\bar{y})$ определен частичный порядок, в качестве ограничений часто целесообразно использовать некоторые граничные множества векторов (линии эквивалентности, границы). Такие подходы широко используются при решении многокритериальных задач. Построение границ обычно осуществляется на основе диалоговых процедур (методы компенсации и др.).

Иногда в практических задачах представляет интерес выбор или ранжирование в рамках схемы морфологического анализа [85]. Пусть имеется μ морфоклассов $M_1 = \{1, \ldots, q_1\}, \ldots, M_\mu = \{1, \ldots, q_\mu\}$. В каждом морфоклассе требуется выбрать лучшие элементы или провести ранжирование. Таким образом, результат представляет собой структуру типа S. Для каждого морфокласса с учетом содержательных требований можно сконструировать вектор оценки близости. В результате получим характеристику близости в виде набора векторов, например: $\{\bar{x}_1, \ldots. \bar{x}_\mu\}$, $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_\mu\}$. Соответственно формируются и наборы векторов-ограничений.

Оценка близости размытых структур представляет собой более сложную задачу. Рассмотрим построение одного типа качественной векторной оценки близости размытых структур S_f, $Q_f \in P(S_f)$, где $P(S_f)$—множество всех размытых слоистых структур на V.

Определение 9. Назовем вектором погрешности (близости) S_f, $Q_f \in P(S_f)$ по элементам $i \in V$ (первого порядка) вектор

$$\bar{z}(S_f, Q_f) = (z^{-(m-1)}, \ldots, z^{-1}, z^1, \ldots, z^{m-1}),$$

где $z^r = |\{i \in V \,|\, d_i^2(S_f) - d_i^1(Q_f) = r, \; d_i(S_f) \,\&\, d_i(Q_f) = \varnothing\}|/n, \quad r > 0;$

$z^r = |\{i \in V \,|\, d_i^1(S_f) - d_i^2(Q_f) = -r, \; d_i(S_f) \,\&\, d_i(Q_f) = \varnothing\}|/n, \quad r < 0.$

Для вектора $\bar{z}$ можно, как и для $\bar{x}$, ввести аналогичные свойства (кроме 9-го, которое не выполняется). Следует отметить, что возможны различные подходы к введению векторов типа $\bar{z}$ и это требует дополнительных исследований.

При агрегации структур реализуется преобразование

$$F: \{G^\lambda = (V, U^\lambda), \; \lambda = \overline{1, \Lambda}\} \to G^a = (V, U^a).$$

В качестве типовых задач можно рассматривать, в частности, следующие:

$$\{C\} \to S, \quad \{T\} \to P, \quad \{S\} \to S, \quad \{S\} \to S_f, \quad \{S_f\} \to S_f.$$

Выделяют три подхода к построению групповых решений: *аксиоматический*, *критериальный* (критерии согласия, мажоритарные правила) и *модельный* (использование подходящей абстрактной модели, например, физической модели в пространстве). Рассмотрим модельный подход применительно к задаче $\{S\} \to S$:

$$h(S^a \,|\, S^a \in \{S \,|\, \bar{\eta}(S, S^\lambda) < \bar{\eta}_0 \quad \forall \lambda = \overline{1, \Lambda}\} \to \max, \qquad (15)$$

где h—параметр, характеризующий качество решения; $\bar{\eta}$—векторная мера близости.

Рассмотрим подробнее задачу $\{S\} \to S_f$. Пусть a_{il} — число исходных структур, в которых $i \in V_l$, $l=\overline{1, m}$; $\xi_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{il}, \ldots \ldots, \xi_{im})$ — частоты отнесения i к m стратам результирующей структуры, где $\xi_{il} = a_{il}/\Lambda$ (это функция принадлежности i к слоям $l=\overline{1, m}$). Определим результирующую S_f^a как набор интервалов $\{d_i\}$. В качестве характеристики качества S_f^a можно рассматривать величину, обратно пропорциональную энтропии

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n}{}' [1/(d_i^2 - d_i^1 + 1)] \to \max.$$

В качестве вектора близости можно использовать модульный вектор $\overline{z}_0 = (z^1, \ldots, z^k, 0, \ldots, 0)$. Тогда задача имеет вид, аналогичный (15):

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(S_f) \to \max,$$
$$\overline{z}(S^\lambda, S_f) < \overline{z}_0 \quad \forall \lambda = \overline{1, \Lambda}. \tag{16}$$

С учетом нулевых компонентов $z^{k+1}, \ldots, z^{k^+}$ можно $\forall i \in V$ определить набор допустимых вариантов интервалов $\{d_{ij} \mid j = \overline{1, q_i}\}$. Тогда (16) сводится к модификации блочной задачи о рюкзаке [43]:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q_i} H_{ij}(d_{ij}) e_{ij} \to \max,$$
$$\sum_{r \geqslant p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q_i} b_{ij}^r e_{ij} \leqslant \sum_{r \geqslant p} z^r, \qquad p = \overline{1, k},$$
$$\sum_{j=1}^{q_i} e_{ij} = 1, \quad \forall i = \overline{1, n}, \qquad e_{ij} = 0 \cup 1, \tag{17}$$

где b_{ij}^r — сумма компонентов ξ_i, отстоящих от d_{ij}^1 (d_{ij}^2) на r. В случае использования двустороннего вектора $\overline{z}_0$ первое ограничение в модели (17) преобразуется в два для отрицательных и положительных компонентов. Следует отметить, что модель (17) представляет самостоятельный интерес для задач рюкзачного типа, когда ресурсы являются взаимозаменяемыми и отранжированными по значимости.

Представляется важным проведение теоретических исследований векторных оценок близости структур, в частности, в следующих направлениях: введение новых типов векторных оценок близости, в том числе для других типов структур (деревьев, размытых структур и др.); анализ свойств векторных оценок близости; выявление условий, когда векторные оценки близости являются конструкциями типа метрик, псевдометрик. Перспективным является комбинирование различных подходов к построению оценок близости.

С точки зрения приложений актуально использование векторных оценок близости при различных типах анализа решений в рамках процесса подготовки и принятия управленческих, плановых, проектных решений. Широкие возможности для применения векторных оценок близости открываются при групповом принятии решений, при агрегировании мнений различных специалистов. Аналогичная ситуация возникает при интегрировании требований различных этапов жизненного цикла, областей применения продукции. Непосредственное использование векторные оценки близости находят при анализе качества и эффективности продукции, проектных вариантов, организационно-технических мероприятий [86].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как вы думаете, стою ли я на верном пути?

Ш. А. Амонашвили («Как живете, дети?»)

Итак, в данной книге рассмотрены унифицированные схемы (стратегии) решения типовых ЗПР, представленные как пути последовательной аппроксимации структур предпочтений. Показано, какую роль при этом призваны играть формальные модели решения ЗПР, а для таких, по мнению авторов, ключевых задач, как линейное и групповое упорядочение объектов и выделение подмножества лучших объектов, соответствующие модели рассмотрены особенно подробно, вплоть до практических рекомендаций по их конкретному применению.

Такой подход при этом закладывает фундамент стандартных средств для построения гибких технологий обработки и последовательной переработки информации с целью подготовки и принятия решений. Дальнейшие исследования могут быть направлены как на расширение предлагаемого в книге скромного методологического «плацдарма», так и на его адаптацию и конкретизацию к реальным проблемам принятия решений, а также, разумеется, и на создание, анализ и усовершенствование формальных моделей для решения тех или иных задач.

Практическая реализация таких гибких технологий только начинается, и путь этот сулит немало трудностей (и методического, и практического характера); однако авторы выражают надежду на то, что исследования и анализ типовых интеллектуальных процедур обработки информации, разработка соответствующих программных комплексов и решение практических задач обеспечат широкое применение технологических подходов к задачам теории принятия решений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

> Так это у вас «*Сд. пр. ком. в. уд. в. н. м. од. ин. хол.*»? А она на самом деле «пр.» и имеет «в. уд.»?
>
> *И. Ильф, Е. Петров («Золотой теленок»)*

БББ — Бержа — Брука — Буркова (модель).
БРК — ближайшей расплывчатой квазисерии (модель).
БС — ближних связей (модель).
БТ — Брэдли — Терри (модель).
В — вероятностная (тип калибровки).
ВС — взвешенная структура (тип калибровки).
ГД — групповое доминирование (отношение и соответствующая модель).
ЗПР — задача принятия решения.
ИР — инвариантность к растяжению (свойство).
ИС — инвариантность к сдвигу (свойство).
ИСП — интегральная степень превосходства (функция и соответствующая модель).
К — кососимметрическая (тип калибровки).
КО — кусочная оптимальность (свойство).
ЛДС — линейных дальних связей (модель).
ЛМС — локальная (модель) максимального согласования.
ЛПР — лицо, принимающее решения.
ЛС — локальная сбалансированность (свойство).
ММ — минимаксная модель.
МС — максимального согласования (модель).
НГП — непротиворечивость группового превосходства (свойство).
нп — наилучшая приближенная (-триангуляция).
нпб — наилучшая приближенная блочная (-триангуляция).
ОВО — возможность количественной оценки важности объектов (свойство).
ОВС — возможность количественной оценки важности страт (свойство).
ОЗР — обобщенная задача о рюкзаке.
ОКА — возможность количественной оценки качества аппроксимации (свойство).
ПВЛ — последовательного вычленения лидеров (модель).
ПД — последовательной дихотомии (модель).
ПМ — потоковая модель.
ПР — положительная реакция (свойство).
ПС — простая структура (тип калибровки).
С — степенная (тип калибровки).
СБ — сегментируемость по бикомпонентам (свойство).
СГД — сохранение группового доминирования (свойство).
СД — сохранение доминирования (свойство).
СПР — системы поддержки решений, системы принятия решений.
ССП — слабый стохастический порядок.
СУ — стохастическая (модель) Ушакова.
СУ — сходство различных оптимальных упорядочений (свойство).
СУР — сходство различных оптимальных упорядоченных разбиений (свойство).
СУР′ — то же, что и СУР.
Т — транспонируемость (свойство).
Т — турнирная (тип калибровки).
УМ — устойчивость «в малом» (свойство).
УСР — устойчивость к свертке и развертке (свойство).
УСС — устойчивость к стягиванию страт (свойство).
ФД — функция доминируемости (функция и соответствующая модель).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Во мне, а не в писаниях Монтеня содержится все, что я в них вычитываю.

Б. Паскаль («Мысли»)

1. Азгальдов Г. Г. Количественная оценка качества продукции — квалиметрия (некоторые актуальные проблемы).— М.: Знание, 1986. — 116 с.
2. Айзерман М. А., Малишевский А. В. Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов.— Препр./ИПУ.— М., 1980.— — 36 с.
3. Александров В. В., Горский Н. Д. Алгоритмы и программы структурного метода обработки данных.— Л.: Наука, 1983. — 288 с.
4. Андрианов Ю. М., Лопатин М. В. Квалиметрические аспекты управления качеством новой техники.— Л.: ЛГУ, 1983. 288 с.
5. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М.: Мир, 1979.— 535 с.
6. Бабат Л. Г. Задача с фиксированными доплатами // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика.— 1978.— № 3.— С. 25—31.
7. Батыршин И. З. Модели размытых предпочтений в задачах выбора // Труды МЭИ.— М.: 1981.— Вып. 533.— С. 57—62.
8. Беленький А. С., Ильенкова С. Д., Левнер Е. В. и др. Применение методов теории расписаний при оптимизации загрузки контейнеров // Динамика неоднородных систем. Материалы семинара.— М.: ВНИИСИ, 1983.— С. 71—78.
9. Белкин А. Р. Приближенная триангуляция матриц в задачах ранжирования и обработки межотраслевого баланса // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1981.— № 1.— С. 26—31.
10. Белкин А. Р. Об одном методе выделения бикомпонент в насыщенных орграфах // Журнал вычисл. математики и мат. физики.— 1982.— Т. 22, № 6.— С. 1518—1521.
11. Белкин А. Р. Об одной модели обработки матрицы парных сравнений // Тез. докл. II Всес. конф. по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации и экспертным оценкам.— М.; Таллин: ИПУ, ВНИИСИ, 1984.— С. 123—124.
12. Белкин А. Р. Желательные свойства оптимальных линейных упорядочений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1987.— № 2.— С. 3—21.
13. Белкин А. Р. Комбинаторные модели структурной аппроксимации // Проблемы бионики.— Харьков: Вища школа, 1987.— Вып. 38.— С. 92—99.
14. Белкин А. Р. Модели упорядочения объектов: свойства, характеристики, сравнительный анализ.— Препринт/НСК АН СССР.— М., 1988.— 57 с.
15. Белкин А. Р. Некоторые модели оптимальной аппроксимации орграфов // Дискретные модели на ориентированных графах.— Омск: Изд-во Омского ун-та, 1987.
16. Белкин А. Р., Левин М. Ш. Комбинаторно-графовые модели обработки информации при принятии решений.— Препринт/НСК АН СССР: — М., 1985.— 52 с.
17. Белкин А. Р., Леонов В. Ю. Приближенная блочная триангуляция и диагонализация матриц методом ветвей и границ // Труды IX

конф. молодых ученых МФТИ.— М.: МФТИ, 1984.— Часть I.— С. 186—191.— Деп. в ВИНИТИ 28.08.84, № 6028—84 ДЕП.
18. Белкин А. Р., Леонов В. Ю. Об одном подходе к структурному преобразованию сложных систем // Проблемы бионики.— Харьков: Вища школа, 1987.— Вып. 39.— С. 70—75.
19. Белкин А. Р., Литвинчев И. С., Шахнов И. Ф. Ранжирование однотипных объектов с помощью отношения группового доминирования // Труды МФТИ. Сер. Аэрофизика и прикладная математика.— М.: МФТИ, 1979.— С. 193—196.
20. Белкин А. Р., Шахнов И. Ф. Об одной модели группового упорядочения // Интерактивные системы принятия решений в планировании и управлении большим городом: Тезисы докл. всес. семинара.— М.: НПО АСУ «Москва», 1981.— С. 190—193.
21. Березовский Б. А., Конторер Л. А. Эффективный алгоритм построения множества недоминируемых вариантов декомпозируемых объектов // Автоматика и телемеханика.— 1987.— № 1.— С. 115—121.
22. Берж К. Теория графов и ее применения.— М.: ИЛ, 1962.— 319 с.
23. Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г. Математико-статистические методы экспертных оценок.— М.: Статистика, 1980.— 263 с.
24. Борисов А. Н., Вилюмс Э. Р., Сукур Л. Я. Диалоговые системы принятия решений на базе мини-ЭВМ: Информационное, математическое и программное обеспечение.— Рига: Зинатне, 1986.— 195 с.
25. Браверман Э. М., Мучник И. Б. Структурные методы обработки эмпирических данных.— М.: Наука, 1983.— 464 с.
26. Брахман Т. Р. Многокритериальность и выбор альтернативы в технике.— М.: Радио и связь, 1984.— 298 с.
27. Брук Б. Н., Бурков В. Н. Методы экспертных оценок в задачах упорядочения объектов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1972.— № 3.— С. 29—39.
28. Буга А. Т., Ланской А. В. Основные направления развития управления качеством продукции за рубежом // Электронная техника. Сер. Управление качеством, стандартизация, метрология, испытания.— М., 1985.— Вып. 1.— С. 49—55.
29. Бурдюк В. Я. Минимаксная задача о триангуляции матрицы // Экономика и мат. методы.— 1981.— Т. XXV, № 4.— С. 801—803.
30. Бурков В. Н., Гроппен В. О. Разрезы в сильно связных графах и потенциалы перестановок // Автоматика и телемеханика.— 1972.— № 6.— С. 111—119.
31. Бурков В. Н., Рубинштейн М. И. Комбинаторное программирование.— М.: Знание, 1977.— 64 с.
32. Вайнштейн А. Д. Задачи об упаковке прямоугольников в полосу // Дискретные задачи оптимизации (управляемые системы).— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984.— Вып. 25.— С. 17—37.
33. Вилкас Э. Й., Майминас Е. З. Решения: теория, информация, моделирование.— М.: Радио и связь, 1981.— 328 с.
34. Виноградская Т. М., Гафт М. Г. Точная верхняя оценка числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах // Автоматика и телемеханика.— 1974.— № 9.— С. 111—118.
35. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления.— М.: Наука, 1984.— 320 с.
36. Воронов А. А. О некоторых новых направлениях в моделировании // Диалектика и системный анализ.— М.: Наука, 1986.— С. 81—92.
37. Вычислительные сети: адаптивность, помехоустойчивость, надежность/Самойленко С. И., Давыдов А. А., Золотарев В. В. и др.— М.: Наука, 1981.— 277 с.
38. Гафт М. Г. Принятие решений при многих критериях.— М.: Знание, 1979.— 64 с.

39. Гафт М. Г., Подиновский В. В. О построении решающих правил в задачах принятия решений // Автоматика и телемеханика.— 1981.— № 6.— С. 73—80.
40. Гвоздик А. А. Некоторые методы обработки нечеткой информации: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., МФТИ. 1986.— 18 с.
41. Генс Г. В. Задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1984.— № 1.— С. 37—44.
42. Генс Г. В., Левнер Е. В. Об эффективных ε-алгоритмах для некоторых задач теории расписаний // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1978.— № 6.— С. 38—43.
43. Генс Г. В., Левнер Е. В. Дискретные оптимизационные задачи и эффективные приближенные алгоритмы // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1979.— № 6.— С. 9—19.
44. Генс Г. В, Левнер Е. В. Эффективные приближенные алгоритмы для комбинаторных задач.— Препринт/ЦЭМИ АН СССР.— М., 1981. — 66 с.
45. Генс Г. В., Левнер Е. В. Дихотомический поиск субоптимальных решений в задачах рюкзачного типа // Математическая экономика и экстремальные задачи.— М.: Наука, 1984.— С. 138—150.
46. Глотов В. А., Павельев В. В. Векторная стратификация.— М.: Наука, 1984.— 94 с.
47. Гнеденко Л. С., Ларичев О. И., Мошкович Е. М., Фуремс Е. М. Процедура построения квазипорядка на множестве многокритериальных альтернатив на основе достоверной информации о предпочтениях лица, принимающего решения // Автоматика и телемеханика.— 1986.— № 9.— С. 101—113.
48. Гудмен С., Хидетниеми С. Введение в разработку и анализ алгоритмов.— М.: Мир, 1981.— 368 с.
49. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М.: Мир, 1982.— 416 с.
50. Диниц Е. А., Карзанов А. В. Булева задача оптимизации при ограничениях одного знака.— Препринт/ВНИИСИ.— М., 1978.— 42 с.
51. Дубов Ю. А. Последовательная процедура принятия решений при многих критериях // Автоматика и телемеханика.— 1978.— № 10.— С. 104—109.
52. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем.— М.: Наука, 1986.— 296 с.
53. Дэвид Г. Метод парных сравнений.— М.: Статистика, 1978.— 144 с.
54. Дюран Б., Оделл П. Кластерный анализ.— М.: Статистика, 1978.— 128 с.
55. Емельянов С. В., Ларичев О. И. Многокритериальные методы принятия решений.— М.: Знание, 1985.— 32 с.
56. Жуковин В. Е. Модели и процедуры принятия решений.— Тбилиси: Мецниереба, 1981.— 110 с.
57. Жуковин В. Е. Многокритериальные модели принятия решений с неопределенностью.— Тбилиси: Мецниереба, 1983.— 104 с.
58. Исаев И. И. Качество — насущная проблема для всех // Стандарты и качество.— 1984.— № 11.— С. 34—37.
59. Казанская Т. А. Распространение коэффициента Кендалла—Смита на парные сравнения со связями // Экспертные оценки в задачах управления.— М.: ИПУ, 1982.— С. 42—50.
60. Казанская Т. А. Общий подход к проверке гипотезы об одномерности индивидуальных предпочтений // Математические методы в социологических исследованиях.— М.: Ин-т социологических исследований, 1984.— С. 112—125.
61. Казанская Т. А. Анализ индивидуальных предпочтений в экономических системах: Автореф. дис. ... канд. экон. наук./ЦЭМИ.— М., 1984.— 17 с.

62. К а з а н с к и й А. Е. Выбор при условии принципиальной сравнимости альтернатив // Труды ВНИИСИ.— 1982.— № 10.— С. 103—109.
63. К а л и т к и н Н. Н. Численные методы.— М.: Наука, 1978.— 512 с.
64. К а м е н с к и й В. С. Методы и модели многомерного шкалирования // Автоматика и телемеханика.— 1977.— № 8.— С. 118—136.
65. К е м е н и Д ж., С н е л л Д ж. Кибернетическое моделирование.— М.: Сов. радио, 1972.— 192 с.
66. К и с е л е в Ю. В. Оценка важности программ методом парных сравнений // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика.— 1971.— № 3.— С. 41—47.
67. Классификация и кластер/Под ред. Дж. ван Райзина.— М.: Мир, 1980.— 350 с.
68. К о г а н Д. И., Л и о г о н ь к и й М. И. Задача о назначениях с учетом индивидуальных предпочтений // Кибернетика.— 1983.— № 6.— С. 80—84.
69. К о з е л е ц к и й Ю. Психологическая теория решений.— М.: Прогресс, 1979.— 504 с.
70. К о л г а н о в а Т. В., О р л о в С. Г., Ф и л и п п о в и ч В. В. Исследование характеристик иерархической структуры программ АСУ // Управляющие системы и машины.— 1976.— № 5 — с. 42—52.
71. К о ф м а н А. Введение в теорию нечетких множеств.— М.: Радио и связь, 1982.— 432 с.
72. К у з н е ц о в а С. А. Многоуровневые сетевые модели и оценки новых разработок // Модели и методы управления производством.— Новосибирск: Наука, 1986.— С. 26—32.
73. Л а н к а с т е р П. Теория матриц.— М.: Наука, 1978.— 308 с.
74. Л а р и н В. Я. Задачи распределения ресурсов в смешанных шкалах// Изв. АН СССР, Техн. кибернетика.— 1981.— № 2.— С. 31—39.
75. Л а р и ч е в О. И. Наука и искусство принятия решений— М.:. Наука, 1979.— 200 с.
76. Л а р и ч е в О. И. Многокритериальные методы принятия решений и направления их всестороннего обоснования // Проблемы и методы принятия решений в организационных системах управления. Труды конференции.— М.: ВНИИСИ, 1985.— С. 5—12.
77. Л а р и ч е в О. И. Системный анализ и принятие решений // Диалектика и системный анализ.— М.: Наука, 1986.— С. 219—238.
78. Л а р и ч е в О. И. Объективные модели и субъективные решения.— М.: Наука, 1987.— 143 с.
79. Л а р и ч е в О. И., Б о й ч е н к о В. С., М о ш к о в и ч Е. М., Ш е п т а л о в а Л. П. Методы иерархических схем в программно-целевом планировании.— Препринт/ВНИИСИ.— М., 1978.— 72 с.
80. Л а р и ч е в О. И., Н и к и ф о р о в А. Д. Аналитический обзор процедур решения многокритериальных задач математического программирования // Экономика и мат. методы.— 1986.— Т. XXII, № 3.— С. 508—523.
81. Л е в и н М. Ш. Одна экстремальная задача организации данных // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1981.— № 5.— С. 103—112.
82. Л е в и н М. Ш. Детерминированные задачи планирования при идентичных процессорах и одновременном поступлении заявок // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1982.— № 4.— С. 51—57.
83. Л е в и н М. Ш. Комбинаторные модели при принятии решений // Процедуры оценивания многокритериальных объектов. Труды ВНИИСИ.— 1984.— Вып. 9.— С. 35—41.
84. Л е в и н М. Ш. Комбинаторные модели планирования испытаний // Аттестация и государственные испытания продукции машиностроения.— М.: ВНИИНМАШ, 1985.— Вып. 53.— С. 54—57.
85. Л е в и н М. Ш. Применение оптимизационных комбинаторных моделей в автоматизированных системах // Обзорная информ. Сер. С—9, Автоматизированные системы проектирования и управления.— М.: ВНИИТЭМР, 1986.— Вып. 1.— 64 с.
86. Л е в и н М. Ш. Современные подходы к оценке эффективности плановых и проектных решений в машиностроении // Обзорная информ.

Сер. С—9, Автоматизированные системы проектирования и управления.— М.: ВНИИТЭМР, 1987.— Вып. 3.— 56 с.
87. Левин М. Ш. Задача агрегирования данных // Тез. докладов 2-й школы «Прикладные проблемы управления макросистемами».— М.: Тамбов: ВНИИСИ, 1987.— С. 26—29.
88. Левин М. Ш., Журцев М. В. Задача анализа значимости отказов компонентов технических устройств // Стандарт. Экспресс-информация.— М.: Изд-во стандартов. 1987.— Вып. 26.— С. 1—6.
89. Левин М. Ш., Магидсон Д. Б. Выбор каналов связи при проектировании отраслевой АСНТИ // Научно-техн. информация. Сер. 2.— 1985.— № 3.— С. 8—11.
90. Левин М. Ш., Махсон М. А. Вопросы применения современных методов оценки качества продукции при госнадзоре // Обзорная информ., сер. Управление качеством продукции.— М.: ВНИИКИ, 1986.— Вып. 1.— 36 с.
91. Левин М. Ш., Михайлов А. А. Система «Оценка» для решения задач группового ранжирования / Тез. докл. Всес. конф. «Теория и практика, методы и модели принятия решений при управлении программами развития крупномасштабных систем».— М.; Рига: ВИНИТИ, 1986.— Часть I.— С. 95—97.
92. Левин М. Ш., Михайлов А. А. Диалоговая система стратификации // Вопросы совершенствования технического уровня и качества продукции на базе стандартизации.— М.: ВНИИНМАШ, 1987.— Вып. 57.— С. 53—59.
93. Левин М. Ш., Фуремс Е. М. Задача формирования портфеля заказов с учетом предпочтений ЛПР // Тез. докл. II Всес. конф. по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации и экспертным оценкам.— М.; Таллин: ИПУ, ВНИИСИ, 1984.— С. 224—225.
94. Левин М. Ш., Чиханченко И. Ф. Групповое ранжирование программ комплексной стандартизации продукции // Стандарты и качество.— 1987.— № 6.— С. 22—26.
95. Левнер Е. В., Генс Г. В. Дискретные оптимизационные задачи и эффективные приближенные алгоритмы.— Препринт/ЦЭМИ АН СССР.— М., 1978.— 55 с.
96. Левнер Е. В., Генс Г. В. Анализ вычислительной сложности приближенных алгоритмов для некоторых дискретных оптимизационных задач // Математические методы решения экономических задач.— М.: Наука, 1979.— Вып. 9.— С. 97—106.
97. Липаев В. В., Филиппович В. В. Принципы и правила модульного построения сложных комплексов АСУ // Управляющие системы и машины.— 1975.— № 1.— С. 15—22.
98. Литвак Б. Г. Об упорядочении объектов по предпочтениям // Математические вопросы управления производством.— М.: Изд-во МГУ, 1973.— Вып. 5.— С. 47—56.
99. Литвак Б. Г. Экспертная информация: методы получения и анализа.— М.: Радио и связь, 1982.— 184 с.
100. Литвак Б. Г. Меры близости и результирующие ранжирования // Кибернетика.— 1983.— № 1.— С. 57—63.
101. Магидсон Д. Б., Левин М. Ш., Будылин В. Н. Опыт разработки документации по оценке деятельности сотрудников НИИ и качества научно-исследовательских работ // Материалы сем. «Научная организация труда и управления в научно-исследовательских и проектных учреждениях».— М.: МДНТП, 1986.— С. 103—106.
102. Макеев С. П., Серов Г. П., Шахнов И. Ф. Аппроксимация бинарных расплывчатых отношений и последовательная оптимизация на взвешенных графах.— Препринт/ВЦ АН СССР.— М., 1980.
103. Математическая Энциклопедия/Гл. ред. акад. И. М. Виноградов.— М.: Советская Энциклопедия, 1982.— Т. 3.— 1184 с.
104. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора.— М.: Наука, 1974.— 256 с.

105. Миркин Б. Г. Анализ качественных признаков и структур.— М.: Статистика, 1980.— 320 с.
106. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной/Борисов А. Н., Алексеев А. В., Крумберг О. А. и др.— Рига: Зинатне, 1982.— 256 с.
107. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации.— М.: Наука, 1979.— 384 с.
108. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта/Под ред. Д. А. Поспелова.— М.: Наука, 1986.— 312 с.
109. Нильсон Н. Искусственный интеллект.— М.: Мир, 1973.— 270 с.
110. Нормативные и дескриптивные модели принятия решений: по материалам Советско-американского семинара.— М.: Наука, 1981.— 350 с.
111. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации.— М.: Наука, 1981.— 208 с.
112. Павлов Ю., Тонев М. Комбинаторный алгоритм нахождения медианы Кемени на множестве частичных отношений // Оптимизация, принятие решений, микропроцессорные системы. Труды 8-го Болгарско-польского симп.— София, 1985.— С. 138—147.
113. Панкова Л. А., Петровский А. М., Шнейдерман М. В. Организация экспертизы и анализ экспертной информации.— М.: Наука, 1984.— 180 с.
114. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.— М.: Мир, 1985.— 510 с.
115. Поспелов Г. С., Ириков В. А. Программно-целевое планирование и управление.— М.: Сов. радио, 1976.— 440 с.
116. Проблема упаковки объектов по контейнерам при наличии многих критериев/Фуремс Е. М. и др. // Проблемы и методы принятия решений в организационных системах управления.— М.: ВНИИСИ, 1982.— С. 84—91.
117. Райфа Г. Анализ решений.— М.: Наука, 1977.— 408 с.
118. Раппопорт А. М. Измерение расстояний между взвешенными графами структуризованных экспертных суждений // Труды ВНИИСИ.— М., 1978.— Вып. 5.— С. 97—108.
119. Раушенбах Г. В. Меры близости и сходства // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях.— М.: ВНИИСИ, 1985.— С. 169—203.
120. Руа Б. Классификация и выбор при наличии нескольких критериев // Вопросы анализа и процедуры принятия решений.— М.: Мир, 1976.— С. 80—107.
121. Рубинштейн М. И., Плитман А. Д. Комбинаторные методы группировки в задачах планирования и организации // Итоги науки и техники. Сер. Техн. кибернетика.— М.: ВИНИТИ, 1986.— Т. 19.— С. 190—228.
122. Садовский Л. Е., Садовский А. Л. Математика и спорт.— М.: Наука, 1985.
123. Скофенко А. В. Программная реализация метода нечеткого ранжирования // Тез. докл. II Всес. конф. по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации и экспертным оценкам.— М.; Таллин: ИПУ, ВНИИСИ, 1984.— С. 176—177.
124. Современное состояние теории исследования операций/Под общ. ред. Н. Н. Моисеева.— М.: Наука, 1979.— 464 с.
125. Соколов Н. А. К решению некоторых экстремальных задач.— Препринт/ВНИИСИ.— М., 1980.— 54 с.
126. Соколов Н. А. Об оптимальной расшифровке монотонных функций алгебры логики // Журнал вычисл. математики и мат. физики.— 1982.— Т. 22, № 2.— С. 449—461.
127. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.— Киев: Наукова думка, 1986.— 268 с.
128. Теория выбора и принятия решений/Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. А. и др.— М.: Наука, 1982.— 328 с.

129. Теория расписаний и вычислительные машины.— М.: Наука, 1984.— 334 с.
130. Ушаков И. А. Задача о выборе предпочтительного объекта // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1971.— № 4.— С. 3—8.
131. Фараджев И. А. Эффективные алгоритмы решения некоторых задач для ориентированных графов // Журнал вычисл. математики и мат. физики.— 1970.— Т. 10, № 4.— С. 1049—1055.
132. Фейгенбаум А. Контроль качества продукции.— М.: Экономика, 1986.— 472 с.
133. Философский словарь/Под ред. И. Т. Фролова.— М.: Политиздат, 1987.— 588 с.
134. Финкельштейн Ю. Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования.— М.: Наука, 1976.— 264 с.
135. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений.— М.: Наука, 1978.— 352 с.
136. Фридман Г. Ш. О некоторых результатах в задаче аппроксимации графов // Проблемы анализа дискретной информации.— Новосибирск: ИЭиОПП СО АН СССР, 1975.— Часть I.— С. 125—152.
137. Фридман Г. Ш., Куперштох В. Л. К задаче аппроксимации ориентированных графов // Проблемы анализа дискретной информации.— Новосибирск: ИЭиОПП СО АН СССР, 1975.— Часть I.— С. 153—166.
138. Фридман Г. Ш., Мжельская Е. В. К анализу задачи согласования парных предпочтений // Тез. докл. II Всес. конф. по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации и экспертным оценкам.— М.; Таллин: ИПУ, ВНИИСИ, 1984.— С. 180.
139. Фуремс Е. М. Модели упаковки в многокритериальных задачах принятия решений при ограниченных ресурсах.— Препринт/ВНИИСИ.— М.; 1986.— 48 с.
140. Хоменюк В. В. Элементы теории многоцелевой оптимизации.— М.: Наука, 1978.— 124 с.
141. Шахнов И. Ф., Гвоздик А. А. Решение задачи упорядочения объектов по предпочтительности с помощью расплывчатых отношений // Тез. докл. IX Всес. симпозиума по кибернетике.— М.: НСК АН СССР, 1981.— Т. 2.— С. 10—12.
142. Шварц М. Сети ЭВМ: анализ и проектирование.— М.: Радио и связь, 1981.— 336 с.
143. Шоломов Л. А. Применение логических методов в задачах последовательного выбора.— Препринт/ВНИИСИ.— М., 1980.— 57 с.
144. Шоломов Л. А. Обзор оценочных результатов в задачах выбора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1983.— № 1.— С. 60—87.
145. Шрейдер Ю. А., Шаров А. А. Системы и модели.— М.: Радио и связь, 1982.— 152 с.
146. Экспертные оценки. Методы и применение/Шмерлинг Д. С. и др. // Статистические методы анализа экспертных оценок.— М.: Наука, 1977.— С. 290—382.
147. Юдин Д. Б. Вычислительные методы многокритериальной оптимизации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1983.— № 4.— С. 3—16.
148. Bhat V. S., Kinariwala B. Optimum tearing in large scale systems and minimum feedback cutsets of a digraph // Journal of Franklin Inst.— 1979.— Vol. 307, No. 2.— P. 83—94.
149. Borillo M. Une méthode de triangulation par blocs des matrices // Mathematica.— Bucuresti, 1965.— Vol. 7, No. 2.— P. 197—203.
150. Bradley R. A., Terry M. E. The rank analysis of incomplete block designs // Biometrika.— London, 1952.— Vol. 39, No. 3—4.— P. 324—345.
151. De Cani J. S. Maximum-likelihood paired comparison ranking by linear programming // Biometrika.— London, 1969.— Vol. 56, No. 3.— P. 537—545.

152. De Cani J. S. A branch and bound algorithm for maximum likelihood paired comparison ranking // Biometrika.— London, 1972.— Vol. 59, No. 1.— P. 131—135.
153. Cook W. D., Kress M. Ordinal ranking and preference strength // Math. Soc. Sci.— 1986.— Vol. 11, No. 3.— P. 295—306.
154. Einhorn H. J., Hogarth R. M. Behavioral decision theory: Processes of judgment and choice // Annual Rev. Psychol.— 1981.— Vol. 32.— P. 53—88.
155. Flueck J. A., Korsh J. F. A branch search algorithm for maximum likelihood paired comparison ranking // Biometrika.— London, 1974.— Vol. 61, No. 3.— P. 621—626.
156. Ford L. R., jr. Solution of a ranking problem for binary comparisons // Amer. Math. Monthly.— 1957.— Vol. 64, No. 1.— P. 28—33.
157. Jech T. The ranking of incomplete tournaments: A mathematician's guide to popular sports // Amer. Math. Monthly.— 1983.— Vol. 90, No. 4.— P. 246—266.
158. Johnson D. S., Niemi K. A. On knapsack, partitions and a new dynamic programming technique for tree // Math. of Oper. Research.— 1983.— Vol. 8, No. 1.— P. 1—14.
159. Kano M., Sakamoto A. Ranking the vertices of a weighted digraph using the length of forward arcs // Networks.— 1983.— Vol. 13, No. 1.— P. 143—151.
160. Kendall M. G. Further contributions to the theory of paired comparisons // Biometrics.— 1955.— Vol. 11, No. 1.— P. 43—62.
161. Kendall M. G., Smith B. B. On the method of paired comparisons // Biometrika.— London, 1940.— Vol. 31, No. 3—4.— P. 324—345.
162. Levner E. Complexity of heuristics for knapsack type problems: A survey // 9th IFORS International Conf. on Oper. Research.— Amsterdam e. a.: North Holland, 1981.— P. 639—654.
163. Luce R. D. Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis.— New York: Wiley, 1959.— 153 p.
164. Moon J. W. Topics on tournaments.— New York: Holt, 1968.— 104 c.
165. Remage R., jr., Thompson W. A., jr. Rankings from paired comparisons // Ann. Math. Statistics.— 1964.— Vol. 35, No. 2.— P. 739—747.
166. Remage R., jr., Thompson W. A., jr. Maximum-likelihood paired comparison rankings // Biometrika.— London, 1966.— Vol. 53, No. 1—2.— P. 143—149.
167. Sangiovanni—Vincentelli A., Bickart T. A. Bipartite graphs and an optimal triangular form of a matrix // IEEE Trans. on Circuits and Systems.— 1979.— Vol. CaS—26, No. 10.— P. 880—889.
168. Slater P. Inconsistencies in a schedule of paired comparisons // Biometrika.— London, 1961.— Vol. 48, No. 3—4.— P. 303—312.
169. Spircu T. Sur le problème de la triangulation // Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl.— Bucuresti, 1980.— Vol. XXV, No. 2.— P. 271—276.
170. Stob M. Rankings from round-robin tournaments // Management Sci.— 1985.— Vol. 31, No. 9.— P. 1191—1195.
171. Tanenbaum A. S. Computer Networks.— New Jersey: Prentice—Hall, 1981.— 517 p.
172. Zermelo E. Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximalproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Zeitschrift.— 1929.— Bd. 29, H. 2.— S. 430—460.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

173. Белкин А. Р., Гвоздик А. А. Потоковая модель упорядочения объектов // Вопросы кибернетики.— М.: НСК АН СССР, 1989.— Вып. 151.— С. 109—117.

174. Г в о з д и к А. А. Потоковая интерпретация турнирной модели упорядочения // Тез. докл. VI Моск. конф. по кибернетике и вычислительной технике.— М.: НСК АН СССР, 1987.— С. 56.
175. Л а р и ч е в О. И., П е т р о в с к и й А. Б. Системы поддержки принятия решений. Современное состояние и перспективы развития // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика.— М.: ВИНИТИ, 1987.— Т. 21.— С. 131—164.
176. Л е в и н М. Ш. Инструментальные средства определения эффективности организационно-технических мероприятий в машиностроении// Обзорн. информ. Сер. С—9, Экономика и специализация машиностроения.— М.: ВНИИТЭМР, 1988.— Вып. 2.— 58 с.
177. Л е в и н М. Ш. Комбинаторные оптимизационные модели рюкзачного типа // Измерение, контроль, автоматизация, 1988.— № 4 (68).— С. 51—63.
178. Л е в и н М. Ш. Многокритериальные комбинаторные модели в задачах квалиметрии // Тезисы докл. межд. конф. «Многокритериальные задачи математического программирования».— Киев—Ялта: Ин-т кибернетики АН УССР, 1988.— С. 10—11.
179. Л е в и н М. Ш. Модели выбора каналов связи в сетях // Тезисы докл. школы-семинара «Программное обеспечение ЭВМ: индустриальная технология, интеллектуализация разработки и применения».— Ростов-на-Дону: НПО Центрпрограммсистем, 1988.— Часть 2.— С. 132—134.
180. Л е в и н М. Ш. Применение оптимизационных комбинаторных моделей при оценке альтернатив // Вопросы кибернетики.— М.: НСК АН СССР, 1989.— Вып. 151.— С. 60—79.
181. Л е в и н М. Ш. Типовой подход к оценке качества машиностроительной продукции/Обзорн. информ. Сер. Управление качеством продукции.— М.: ВНИИКИ, 1988.— Вып. 4.— 64 с.
182. Л е в и н М. Ш., М и х а й л о в А. А. Фрагменты технологии стратификации множества объектов.— Препринт/ВНИИСИ.— М., 1988.— 60 с.
183. М а н у э л ь Т. Удастся ли выжить экспертным системам? // Электроника, 1988.— № 12—13.— С. 65—88.
184. П е т р о в с к и й А. Б., С т е р н и н М. Ю., М о р г о е в В. К. Системы поддержки принятия решений.— Препринт/ВНИИСИ.— М.: 1987.— 44 с.
185. П о с п е л о в Г. С. Искусственный интеллект — основа новой информационной технологии.— М.: Наука, 1988.— 280 с.
186. Построение и анализ экспертных систем/Под ред. Ф. Хейеса — Рота, Д. Уотермана, Д. Лената.— М.: Мир, 1987.— 441 с.
187. Проблемы и методы принятия решений в организационных системах управления (тезисы докладов III-й Всесоюзной конференции).— М.: ВНИИСИ, 1988.— 216 с.
188. С у б б о т и н М. М. Новая информационная технология: создание и обработка гипертекстов // НТИ. Сер. 2. 1988.— № 5.— С. 2—6.
189. Тезисы докладов I-й Всесоюзной конференции по искусственному интеллекту.— Переславль-Залесский: ИПС АН СССР, 1988.— Т. 2.— 616 с.
190. Человеко-машинные процедуры принятия решений.— Сб. трудов.— М.: ВНИИСИ, 1988.— № 11.— 90 с.
191. Ш р е й д е р Ю. А. Концепции интеллектуальных систем/Научно-аналитический обзор. Сер. Информация, наука, общество.— М.: ИНИОН, 1988.— 55 с.
192. Book of Abstracts of 8 International Conference on MCDM «Improving Decision Making in Organizations».— Manchester: Manchester Business School, 1988.— 67 p.
193. B o w e r m a n J. Putting Expert Systems into Practice.— Oxford: Routledge, Chapman & Hall, 1988.— 388 p.
194. G o l d e n B. L., H e v n e r A., P o w e r D. Decision insight systems for microcomputers: a critical evaluation // Comput. and Operat. Res.— 1986.— Vol. 1.— № 2/3.— P. 287—300.

195. Humphreys P. Intelligence in Decision Support // New Directions in Research on Decision Making.— Amsterdam e. a.: Elsevier Sciences Publishers B. V. (North Holland), 1986.— P. 333—361.
196. Microcomputer DSS: Design, Implementation and Evaluation/Ed. by S. J. Andriole.— Wellesley, MA: Information Science Inc., 1986.— 357 p.
197. Organizational Decision Support Systems. Proceedings of IFIP WG—83 Working Conference.— R. M. Lee, A. M. McCosh, P. Migliarese (Editors).— Amsterdam e. a.: Elsevier Science Publishers B. V. (North Holland), 1988.— 333 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

БЕЛКИН Анатолий Рафаилович,
ЛЕВИН Марк Шмуилович

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ:
КОМБИНАТОРНЫЕ МОДЕЛИ
АППРОКСИМАЦИИ ИНФОРМАЦИИ

Серия «Теория и методы системного анализа»,
выпуск 26

Заведующий редакцией *А. С. Косов*
Редактор *О. И. Сухова*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 41177

Сдано в набор 30.07.89. Подписано к печати 03.04.90. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 10. Усл. кр.-отт. 10,25. Уч.-изд. л. 10,27. Тираж 5600 экз. Заказ № 2973. Цена 1 р. 50 к.

Издательско-производственное и книготорговое объединение «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография»
Государственного комитета СССР по печати.
113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука».
121099, Москва, Шубинский пер., 6. Зак. 777